Миколаївський національний університет

імені В.О. Сухомлинського

**В. М. ДАРМОСЮК**

**О. В. БІЛАЙ**

**Т. І. ВАЛАХ**

**ЛІНІЙНА АЛГЕБРА**

*Навчальний посібник*

*для студентів фізико-математичних спеціальностей*

*вищих навчальних закладів*

**Системи лінійних рівнянь. Визначники.**

**Матриці. Комплексні числа.**

Миколаїв 2016

УДК 512.64

ББК 22.143я73

Д20

**Автори:**

Дармосюк В.М., Білай О.В., Валах Т.І.

**Рецензенти:**

|  |  |
| --- | --- |
| Кириченко В.В., | доктор фізико – математичних наук, професор,завідувач кафедри геометрії Київського національного університету імені Тараса Шевченка |
| Жучок А.В., | доктор фізико – математичних наук, професор,завідувач кафедри алгебри та системного аналізу Луганського національного університету імені Тараса Шевченка |
| Поздєєв В.О., | доктор фізико – математичних наук, професор,завідувач кафедри прикладних математики і механіки та інформатики Миколаївського національного університету ім. В.О.Сухомлинського |

*Рекомендовано як навчальний посібник для студентів фізико-математичних спеціальностей вищих навчальних закладів*

Посібник присвячено методам розв’язування систем лінійних рівнянь, обчислення визначників різних порядків, діям з матрицями, комплексним числам.

Мета посібника – допомогти студентам у формуванні їх математичного мислення, оволодінні теоретичними знаннями і практичними навичками розв’язування задач, необхідних в подальшій навчальній та професійній діяльності, а також підготувати студентів до використання методів лінійної алгебри при вивченні геометрії, математичного аналізу, інформатики та інших прикладних дисциплін.

Дармосюк В.М. та ін.

Д 20 Лінійна алгебра: Системи лінійних рівнянь. Визначники.

Матриці. Комплексні числа. Частина І. – Миколаїв: МНУ, 2016.-

174 с.

УДК 512.64

ББК 22.143я73

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА 4

Практичне заняття 1. *Системи лінійних рівнянь. Розв’язування систем лінійних рівнянь. Метод Гаусcа*. 5

Практичне заняття 2 *Визначники 2-го та 3-го порядків, їх обчислення та застосування до розв’язування систем лінійних рівнянь.Метод Крамера.* 29

Практичне заняття 3. *Визначники го порядку, їх обчислення за найпростішими властивостями. Мінори –го порядку, їх алгебраїчні доповнення.* 42



Практичне заняття 4. *Обчислення визначників го порядку. Теорема Лапласа. Правило Крамера для розв’язування систем лінійних рівнянь з невідомими. Метод рекурентних співвідношень. Застосування визначників в геометрії.* 64



Практичне заняття 5. *Операції над матрицями. Ранг матриці. Обчислення оберненої матриці.*  81

Практичне заняття 6. *Розв’язування матричних рівнянь. Розв’язування систем лінійних рівнянь в матричній формі.* 107

Практичне заняття 7. *Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі.Спряжені комплексні числа.* 125

Практичне заняття 8. *Геометрична інтерпретація комплексного числа.* 137

Практичне заняття 9. *Тригонометрична форма комплексного числа. Дії над комплексними числами в тригонометричній формі* 150

Практичне заняття 10. *Добування кореня го степеня з комплексного числа* 163

Література 174

# ПЕРЕДМОВА

Курс лінійної алгебри є профілюючим курсом, фундаментом математичної підготовки майбутнього фахівця в галузі природничо – математичних наук. Цим зумовлена велика кількість діючих підручників та збірників задач з лінійної алгебри. Проте останні роки спостерігається тенденція до зменшення обсягу аудиторних занять на користь збільшення і поліпшення якості самостійної роботи студентів. Метою даного посібника є організація аудиторної та самостійної роботи студентів в умовах кредитно - трансферної системи. Навчальний посібник включає 10 практичних занять з тем: «Системи лінійних рівнянь», «Визначники», «Матриці», «Комплексні числа».

Навчально-методичні матеріали до кожного практичного заняття включають в себе основні теоретичні відомості, посилання на літературу, питання для самоперевірки, методичні вказівки до розв’язання задач, задачі для аудиторної та самостійної роботи, відповіді та індивідуальні завдання. В пункті «Основні теоретичні відомості» без доведення наводяться теоретичні відомості, необхідні для розв’язання практичних задач. Теоретичні відомості супроводжуються розв’язками типових прикладів та методичними вказівками, які спрямовані на полегшення засвоєння матеріалу студентами. Відповідаючи на питання самоперевірки студент матиме можливість самостійно актуалізувати основні положення теоретичного матеріалу. Наведені методичні рекомендації допоможуть студенту при розв’язанні аудиторних, самостійних та індивідуальних завдань. Структура посібника відповідає поставленим навчально-методичним завданням.

Самостійна робота студентів має дві складові: підготовка до аудиторних занять та підготовка до підсумкового контролю. Однією з складових поточного контролю є виконання та захист студентами індивідуальних завдань.

Навчальний посібник "Лінійна алгебра" пройшов апробацію на механіко-математичному факультеті Миколаївського національного університету ім. В.О. Сухомлинського та одержав позитивну оцінку у студентів факультету спеціальності "Математика" і викладачів кафедри математики.

Дана методична розробка може бути корисною як для аудиторної роботи, так і для самостійного засвоєння курсу студентами в рамках кредитно - трансферної системи навчання.

# Практичне заняття 1

# *Системи лінійних рівнянь.*

# *Розв’язування систем лінійних рівнянь. Метод Гаусcа*.

***Основні теоретичні відомості***

([1], с. 254 – 279, с. 427-429, [2], с. 15-23; 83-88, [3]. с. 16-24.**)**

У загальному випадку система *m* лінійних рівнянь з *n* невідомими має вигляд:



- невідомі, які треба знайти; - сталі числа, їх називають *коефіцієнтами системи* (перший індекс коефіцієнта означає номер рівняння, в якому міститься цей коефіцієнт, а другий індекс – номер невідомого, при якому його записано); - сталі числа, їх називають *вільними членами.*



*Розв’язком* системи називають будь-яку сукупність чисел , яка при підстановці в систему замість невідомих перетворює всі рівняння системи в вірні рівності.



Систему рівнянь називають *сумісною,* якщо вона має принаймні один розв’язок, і *несумісною*, якщо вона не має розв’язків.

Якщо система рівнянь має єдиний розв’язок, то її називають *визначеною*; якщо система має більш як один розв’язок, то її називають *невизначеною*.

Систему рівнянь називають *однорідною*, якщо всі вільні члени дорівнюють нулю, і *неоднорідною*, якщо принаймні один з вільних членів не дорівнює нулю. Однорідні системи завжди сумісні, оскільки мають розв’язок , який називають *очевидним* або *тривіальним*. Дві системи лінійних рівнянь називають *еквівалентними* або *рівносильними*, якщо вони сумісні й мають одні й ті самі розв’язки, або якщо вони *несумісні*.



При розв’язуванні системи лінійних рівнянь виконують *елементарні перетворення* над рівняннями системи, які приводять до рівносильної системи:

1. Множення обох частин рівняння на число відмінне від нуля.

2. Додавання (віднімання) до одного рівняння іншого, помноженого на число відмінне від нуля.

3. Переставляння рівнянь місцями (транспонування двох рівнянь).

4. Викреслювання рівнянь виду: .



5. Переставляння невідомих в системі рівнянь.

*Метод Гаусса (метод послідовного виключення невідомих)*

Нехай задано систему *m* лінійних рівнянь з *n* невідомими:



Її називають *первісною*системою.

Припустимо, що . Тоді в усіх рівняннях первісної системи, починаючи з другого, можна виключити невідоме . Для того, щоб виключити його з другого рівняння, треба помножити перше рівняння на множник і відняти результат від другого рівняння. Аналогічно виключається і з усіх інших рівнянь системи. В результаті дістанемо таку систему:



Отримана система рівносильна первісній. Якщо після даних дій в системі з’явилися рівняння виду , то їх потрібно викреслити. На цьому перший крок методу Гаусса закінчується. Елемент називається *головним елементом*(ведучим) цього кроку.



Наступні кроки методу Гаусса виконуються аналогічно. Так, за другим кроком, якщо послідовно множимо друге рівняння на , ,…, і, відповідно, віднімаємо його із 3-го, 4-го,…, *m*-го рівнянь. В результаті виключається невідоме із усіх рівнянь, крім 1-го і 2-го. За третім кроком виключається невідоме із усіх рівнянь, крім перших трьох і т.д.



Можливо, що за деяким кроком методу Гаусса зустрінеться рівняння виду:

,



Тоді система, яка розглядається, несумісна; подальший її розв’язок закінчується. Якщо ж при виконанні методу Гаусса рівняння такого виду не зустрічається, то первісна система не більше ніж через *m* кроків перетворюється в еквівалентну систему виду:

(2)



Для спрощення запису в системі (2) штрихи над коефіцієнтами опущені. В ній не більше *m* рівнянь, тобто , так як деякі рівняння, можливо, були зведені до вигляду і викреслені.



При *r = n* система (2) має трикутний вигляд:

(3)



Системи (2) і (3) одержані із первісної системи за допомогою лінійних перетворень: додавання рівнянь і множення рівнянь на число. Системи (2) і (3), які одержали внаслідок зазначених операцій, - *вивідними.* Отже, за допомогою лінійних перетворень, переходимо від первісної до вивідної системи.

Виконаємо в системі (3) зворотній хід методу Гаусса.

Із останнього рівняння системи (3) знаходимо значення невідомого . Підставивши його в передостаннє рівняння, знаходимо значення . Продовжуючи так далі, визначимо значення всіх невідомих . Отже, якщо первісна система за методом Гаусса зводиться до трикутного вигляду, то така система визначена, тобто має єдиний розв’язок.



Якщо система (2) має вид трапеції. В ній невідомі приймаються за головні, а невідомі , ,…, - за вільні. Система (2) зводиться до вигляду:



число вільних невідомих дорівнює .



Надамо вільним невідомим довільних числових значень:

, ,…, .



Праві частини цієї системи являтимуть собою тепер якісь числа.

Позначимо ці числа:



В результаті отримаємо систему:



Така система має єдиний розв’язок, який знаходиться так як розв’язок системи (3).

Провівши зворотній хід методу Гаусса знаходимо значення ,



, …, , які позначаємо . Тоді розв’язком первісної системи є вектор ().



При конкретних значеннях будемо одержувати частинні розв’язки первісної системи. Так як кожне невідоме може приймати будь-яке значення (), первісна система при , зводиться до трапецевидного вигляду, має нескінченну () множину розв’язків. Отже, система буде сумісна і невизначена.



Цілком зрозуміло, що при відсутності вільних невідомих первісна система (якщо вона сумісна) матиме лише один розв’язок. Оскільки число вільних невідомих дорівнює , де *n*- число усіх невідомих, а *r*- число рівнянь розв’язуючої частини, то дістанемо такий висновок:



**Теорема.** *Якщо система лінійних рівнянь сумісна і у розв’язуючій частині вивідної системи, одержаної методом Гаусса, число рівнянь менше від числа невідомих – система невизначена; якщо ж це число рівнянь дорівнює числу невідомих, - система визначена.*

Формули *загального розв’язку* системи встановлюють зв'язок між значеннями невідомих , ,…, і вільними невідомими , ,…, .



Формули виду

,

де , , ,…, , називаються *загальним розв’язком системи*.

З них легко дістати конкретні розв’язки системи, які називають *частинними* розв’язками. Надаючи вільним невідомим довільних числових значень

, ,…, ,



обчислюємо відповідні числові значення решти невідомих:



Вектор і є частинним розв’язком первісної системи, відповідним до вибраних значень вільних невідомих.



Якщо однорідна система



елементарними перетвореннями над рівняннями системи (над рядками матриці, складеної з коефіцієнтів при невідомих) зводиться до спрощеного виду



і кількість рівнянь в останній системі менше кількості невідомих, то однорідна система лінійних рівнянь має нетривіальні розв’язки. Невідомі - головні невідомі, а - вільні невідомі.

Виконавши зворотній хід методу Гаусса, знайдемо *загальний розв’язок однорідної* *системи.*



За отриманими формулами знаходимо  частинних розв’язків , надаючи вільним невідомим *стандартні набори значень* (в кожному наборі одна із вільних невідомих дорівнює 1, а всі інші – дорівнюють нулю):

1.,

2.,

(n-r)..

Одержуємо (n-r) розв’язків

, ,..........., ,

які є лінійно незалежними.

Будь-яка сукупність (n-r) лінійно незалежних розв’язків  однорідної системи називається *фундаментальною* *системою* (сукупністю) розв’язків.

Загальний розв’язок неоднорідної системи рівнянь є сумою деякого її частинного розв’язку та загального розв’язку відповідної однорідної системи.

При розв’язуванні систем лінійних рівнянь користуються поняттям матриці.

*Матрицею* називається прямокутна таблиця чисел, яка має рядків і стовпців. Коефіцієнти при невідомих у лівій частині системи лінійних рівнянь якраз і утворюють таку прямокутну таблицю, яку називають *головною* *матрицею* *системи*:



.



Числа називаються елементами матриці, а запис означає її розмір. – кількість рядків матриці, – кількість стовпців матриці. Якщо , то матриця називається *квадратною*.



*Розширеною* *матрицею* *системи* утворюють приєднанням до головної матриці стовпця вільних членів.

***Питання для самоперевірки***

1. Яка система рівнянь називається лінійною?
2. Що називається розв’язком системи лінійних рівнянь?
3. Коли система лінійних рівнянь сумісна, а коли несумісна?
4. Яка система називається визначеною, невизначеною?
5. Які системи лінійних рівнянь називаються рівносильними?
6. Які елементарні перетворення над рівняннями системи приводять до рівносильної системи?
7. В чому полягає суть метода Гаусса?
8. Чи рівносильні вивідні та первісна системи рівнянь?
9. Якщо вивідна система має трикутний вигляд, чи обов’язково при цьому первісна система сумісна?
10. Що можна сказати про визначеність системи рівнянь, якщо її вивідна система має трапецевидний вигляд?
11. Як одержати частинні розв’язки із загального розв’язку системи?
12. Чи визначена система лінійних рівнянь, якщо у розв’язуючій частині її вивідної системи число рівнянь менше числа невідомих?
13. Чи визначена система лінійних рівнянь, якщо у розв’язуючій частині її вивідної системи число рівнянь дорівнює числу невідомих?
14. Чим відрізняються між собою системи лінійних однорідних і неоднорідних рівнянь?
15. Що називається фундаментальною системою (сукупністю) розв’язків однієї системи?
16. Що можна сказати про сумісність системи лінійних однорідних рівнянь?
17. Який розв’язок системи лінійних однорідних рівнянь називається тривіальним?
18. Скільки розв’язків має система лінійних однорідних рівнянь, якщо в ній відсутні вільні невідомі?
19. Як скласти головну матрицю системи лінійних рівнянь?
20. Як скласти розширену матрицю системи лінійних рівнянь?

***Методичні вказівки до розв’язання задач***

**Приклад 1***.* *Розв’язати* *систему* *лінійних рівнянь*



*Розв’язання*. Помножимо перше рівняння заданої системи послідовно на 3,5,7 і віднімемо відповідно від другого, третього та четвертого рівнянь. В результаті дістанемо систему



Для виключення невідомого у третьому і четвертому рівняннях отриманої системи зручно скористатися не перетвореним другим рівнянням цієї системи. Помноживши це рівняння на (-2) і на (-5) та додавши його до третього і четвертого рівняння останньої системи, дістанемо систему:



Помноживши третє рівняння на (-4) і додавши його до четвертого, матимемо



Виконавши зворотній хід в останній системі, знаходимо невідомі:

.



**Приклад 2***. Розв’язати систему рівнянь*



*Розв’язання*. Часто в методі Гаусса замість того, щоб виконувати елементарні перетворення над рівняннями системи, виконують ці перетворення з рядками розширеної матриці.

Складемо розширену матрицю

А=



(вертикальною рискою відокремимо стовпець вільних членів). Зведемо матрицю А до трикутного вигляду, тобто до того самого вигляду, що й трикутна система. Перший крок розв’язання системи полягає в тому, що невідоме необхідно виключити з усіх рівнянь, починаючи з другого. У матричній формі цей крок зводиться до таких перетворень, коли всі елементи першого стовпця (крім того, що міститься в першому рядку) перетворюються в нулі. Помножимо послідовно перший рядок на 2,1,1 і віднімемо відповідно від другого, третього та четвертого рядків. У результаті дістанемо



Для зручності виконання наступних дій поміняємо місцями другий і третій рядки, помноживши останній на –1:



Другий крок полягає в тому, що невідоме треба виключити з усіх рівнянь, починаючи з третього. В матричній формі цей крок зводиться до того, що всі елементи другого стовпця (крім тих, що містяться в першому та другому рядках) перетворюються в нулі. Помножимо другий рядок на 3 та 1 і додамо відповідно до третього і четвертого рядків. У результаті дістанемо:



Поміняємо місцями третій і четвертий рядки, помноживши останній на –1:



Помножимо третій рядок на 4 і додамо до четвертого.

Матимемо:



Цій матриці відповідає трикутна система лінійних рівнянь, еквівалентна заданій системі:



Розв’язавши цю систему за допомогою зворотного ходу, дістанемо:



**Приклад 3**. *Розв’язати систему лінійних рівнянь:*



*Розв’язання*. Складемо розширену матрицю із коефіцієнтів при невідомих та стовпця вільних членів і виконаємо елементарні перетворення над рядками розширеної матриці:

~ ~



Останній матриці відповідає система рівнянь



Система має безліч розв’язків. Основними змінними візьмемо і виразимо їх через вільні змінні . Знайшовши з другого рівняння , а з першого – невідому , після виключення з нього змінної , одержимо загальний розв’язок системи , , де - довільні числа.



**Приклад 4**. *Розв’язати систему лінійних рівнянь*



*Розв’язання*. Із коефіцієнтів при невідомих складемо матрицю системи. Поміняємо місцями коефіцієнти першого і третього рядків і візьмемо рядок, який стоїть першим, за головний (розв’язуючий) .

 ~  

~  .

Від останньої матриці перейдемо до системи, еквівалентної даній системі 

Головні невідомі , вільні невідомі .

Загальний розв’язок системи має вигляд



Фундаментальна система розв’язків складається із векторів:

.

**Приклад 5**. *Розв’язати систему лінійних рівнянь*



*Розв’язання.* Складемо розширену матрицю із коефіцієнтів при невідомих та стовпця вільних членів. Коефіцієнти і вільний член четвертого рядка запишемо на перше місце.

 ~

~  ~

~ ~

~ .

Від останньої матриці перейдемо до системи, еквівалентної даній системі



Система сумісна і визначена, має один розв’язок:

,,  ,.

**Приклад 6**. З деякого листового матеріалу потрібно викроїти 170 заготовок типу А, 170 заготовок типу Б і 80 заготовок типу В. При цьому застосовують три способи розкрою. Знайти, скільки листів матеріалу необхідно для одержання заданої кількості заготовок кожного типу. Кількість заготовок, які можна отримати з кожного листа при кожному способі розкрою, зазначена в таблиці:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Тип  розкрою | Кількість отриманих  заготовок за  способами розкрою | | |
| I | II | III |
| A | 4 | 2 | 3 |
| Б | 1 | 5 | 2 |
| В | 3 | 1 | 1 |

*Розв’язання*. Позначимо кількість листів матеріалу, що розкроюють відповідно першим, другим та третім способом. Тоді заготовок типу А при першому способі розкрою вийде , при другому - , а при третьому - . Загальна кількість заготовок типу А повинна дорівнювати 170. Маємо рівняння . Аналогічно, розраховуючи кількість заготовок типів Б і В, дістанемо такі рівняння: ; . Для знаходження кількості листів матеріалу і маємо систему рівнянь



Розв’язуючи систему методом Гаусса, знаходимо .



**Приклад 7**. *Показати, що площини*  *, , , утворюють тетраедр.*



*Розв’язання.* Чотири площини утворюють тетраедр, якщо кожна їх трійка перетинається в одній точці і серед чотирьох точок перетину немає співпадаючих.

Розв’язуючи систему рівнянь



одержуємо точку А(3;4;0).

Із системи рівнянь



одержуємо другу точку В(4;-3;1)

Система рівнянь



дає третю точку С(-4;1;-1)

Розв’язуючи систему



одержуємо четверту точку Д(-1;-1;5).

Так як одержані точки різні, то дані площини утворюють тетраедр, вершинами якого є точки А,Б,С,Д.

***Вправи для аудиторної і самостійної роботи***

І. *Розв’язати системи лінійних рівнянь*:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1. | | 2. | |
| 3. | | 4. | |
| 5. | | 6. | |
| 7. | 8. | |
| 9\*. | | 10\*. | |

11\*.



12.  13. 

14.  15. 

16.  17. 

18. 

ІІ. Розв’язати задачу, склавши систему лінійних рівнянь.

1. Із пункту А в пункт Б необхідно перевезти обладнання трьох типів: I типу – 150 одиниць, II типу – 310, III типу – 210. Для цього можна замовити три види транспорту. Кількість обладнання кожного типу, яке вміщується у певний вид транспорту, наведено в таблиці:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Тип  обладнання | Кількість обладнання,  що вміщується у вид транспорту | | |
|  |  |  |
| I | 1 | 4 | 2 |
| II | 3 | 6 | 4 |
| III | 3 | 4 | 2 |

Вказати, скільки транспорту кожного виду необхідно замовити, щоб перевезти все обладнання.

2. Швейна фабрика виробляє дитячі, жіночі та чоловічі костюми, використовуючи тканини трьох типів. Норми витрат кожної тканини на один костюм і за один день подані в таблиці:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Види тканини | Норми витрат тканини на один костюм, ум. од. | | | Обсяг витрат  тканини за один день, ум. од. |
| Дитячій | Жіночій | Чоловічій |
| I | 1 | 3 | 4 | 1900 |
| II | 2 | 5 | 5 | 3100 |
| III | 1 | 2 | 5 | 1800 |

Знайти щоденний обсяг випуску костюмів кожного виду.

ІІІ. *З’ясувати, які з рядків матриці*



*утворюють фундаментальну систему розв’язків для системи рівнянь*

**

***Відповіді***

**І.** **1.** ; **2.** ;



, . **3.** ; **4.**



, , ; **5.** ;



**6.** , . **7.** ;



**8.**



**9\*.** ;



**10\*.** ; 11\*. .



**12**. ; **13.** ;

**14.** ; **15.** ;

**16.** ;

**17.** ;

**18.** .

**ІІ**. **1**. 30 першого типу; 40 другого типу; 10 третього типу;

**2**. 550 дитячих костюмів; 250 жіночих костюмів, 150 чоловічих костюмів.

**ІІІ.** перший та другий рядок.

***Індивідуальні завдання***

І. Розв‘язати системи лінійних рівнянь за методом Гаусса, виконати перевірку:

|  |  |
| --- | --- |
| 1. | 2. |
| 3. | 4. |
| 5. | 6. |
| 7. | 8. |
| 9. | 10. |
| 11. | 12. |
| 13. | 14. |
| 15. | 16. |
| 17. | 18. |
|  | |
|  | |
| 23. | 24. |
| 25. | 26. |
| 27. | 28. |
| 29. | 30. |

# 

**ІІ.** Дослідити на сумісність, визначити загальний та два частинних розв’язки системи лінійних рівнянь.

1.  2. 



5. 6. 

7.  8. 

9.  10.

11. 12.

13.  14. 

15.  16.

17. 18.



23.  24. 

25.  26. 

27.  28. 

29.  30. 

**ІІІ.** Знайти загальний розв’язок і фундаментальну систему розв’язків системи рівнянь:

1.  2. 



5.  6. 

7.  8. 

9.  10. 



15. 16. 



19. 20. 





25. 26

27. 28.



# Практичне заняття 2

# *Визначники 2-го та 3-го порядків, їх обчислення*

# *та застосування до розв’язування систем лінійних рівнянь.*

# *Метод Крамера.*

***Основні теоретичні відомості***

**([**1], с. 314-330. [2], с. 23-36., [3], с. 24-26, с. 41-44)

Запишемо системи двох та трьох лінійних рівнянь відповідно з двома та трьома невідомими.

(1), (2)



Елементарними перетвореннями над рівняннями систем знаходимо

а) для системи (1):

(1.1)



б) для системи (2):



**Означення 1:** *Вираз називають визначником**другого**порядку, складеним для квадратної матриці ; його позначають* ***.***



Таким чином =.



Згідно з означенням визначника другого порядку чисельники виразів (1.1) можна записати так:

=, =.



Тоді формули (1.1) набирають вигляду:

, (1.2)



Визначник, складений з коефіцієнтів при невідомих, , позначимо буквою (або ); називатимемо його *головним* або просто *визначником**системи*; два інші визначники позначимо відповідно , . Тоді формули (1.2) запишемо у вигляді



, (0) (1.3)



**Означення 2:** *Визначником третього порядку, складеним для квадратної матриці,* ***,*** *називається число, що дорівнює* *алгебраїчній сумі*



.



Її позначають

.



Отже,

= .



По аналогії з системою двох лінійних рівнянь (1) можемо відповідно скласти формули для розв’язування системи (2)

, , . (2.2)



, , (0). (2.3)



Визначники третього порядку можна обчислювати за правилом, яке називається правилом трикутників:

“**+**” “–“



.



Три перші члени визначника третього порядку є добутками елементів, розміщених на головній діагоналі , й елементів, розміщених у вершинах двох рівнобедрених трикутників, основи яких паралельні основній діагоналі .



Три інші члени є добутками елементів побічної діагоналі, взятими з протилежним знаком , й елементів, розміщених у вершинах рівнобедренних трикутників, основи яких паралельні побічній діагоналі .



Є ще й інше правило обчислення визначників третього порядку, яке називають *правилом Саррюса*. За цим правилом складають таблицю, для якої обчисляють визначник. Справа до неї дописують два перші стовпці. В основній таблиці проводять головну діагональ і дві прямі, їй паралельні, що перетинають по три елементи. Добутки елементів, розміщених на зазначених трьох прямих, є трьома першими членами визначника. Щоб обчислити три інші члени визначника, проводять побічну діагональ і дві прямі, їй паралельні, на яких розміщено по три елементи. Добутки цих елементів беруть с протилежним знаком.



+

+

+

–

–

–

Такий самий результат матимемо й тоді, коли до основної таблиці допишемо знизу два перші рядки і виконаємо ті самі дії, що й у першому випадку.

**Означення 3**: *Будь – яка упорядкована множина елементів називається перестановкою із елементів.*



**Означення 4**: *Інверсією називається таке розміщення двох чисел у перестановці, коли більше число стоїть лівіше меншого.*

*Транспозицією* називається операція переставлення місцями двох елементів при умові, що інші елементи залишаються на своїх місцях.

**Теорема**. *Одна транспозиція змінює парність перестановки*.

**Означення 5:** *Підстановкою* ***S*** *називається функція (відображення), яка взаємно однозначно відображає скінченну множину на себе.*



**Означення 6:** *Підстановка називається парною, якщо сумарна кількість**інверсій першого та другого рядків – парна, і непарною, якщо сумарна кількість інверсій – непарна.*

*Добутком двох визначників* і називається третій визначник , елементи якого утворюються за допомогою однієї з чотирьох формул:



1. ;



2. ;



3. ;



4. ;



У випадку 1) елементи утворюються як сума добутків елементів -го рядка визначника на відповідні елементи визначника , тому говорять, що в даному випадку добуток одержано множенням рядків 1-го визначника на рядки 2-го визначника.



У випадку 2) – шляхом множення рядків першого визначника на стовпці другого визначника.

У випадку 3) – шляхом множення стовпців 1-го визначника на рядки 2-го визначника.

У випадку 4) – шляхом множення стовпців 1-го визначника на стовпці другого визначника.

***Питання для самоперевірки***

1. Що називається визначником 2-го, 3-го порядку?

2. Користуючись означенням, записати в розгорнутому вигляді визначник другого порядку, визначник третього порядку.

3. Що називається перестановкою із елементів?



4. Що називається інверсією?

5. Що називається транспозицією?

6. Як зміниться визначник 3-го порядку, якщо його рядки переставити так: 1 рядок – 2 місце, 2 рядок – на 3 місце, 3 рядок – на 1 місце?

7. Яка підстановка називається парною, яка непарною?

8. Що називається добутком двох визначників?

***Методичні вказівки до розв’язання задач***

**Приклад 1.** *Обчислити визначники*.

а) ; б) ; в) ; г)



*Розв’язання*. За формулою = обчислюємо



а) ;



б)=



;



в) =;



г) =.



**Приклад** **2**. *Обчислити визначник*



*Розв’язання*. За означенням визначника 3-го порядку =



=



.



**Приклад 3**. *Розв’язати систему*

.



*Розв’язання.* Обчислимо головний визначник системи, який складається із коефіцієнтів при невідомих.

==.



Так як , то систему можна розв’язати за формулами (1.2) та (1.3).



, ;



, .



*Перевірка:*



*Відповідь*: , .



**Приклад 4**. *Розв’язати систему*



*Розв’язання*. Обчислимо головний визначник системи, який складається із коефіцієнтів при невідомих

=.



Так як головний визначник системи відмінний від 0, то значення невідомих можна знайти за формулами (2.2) та (2.3):



, , .



*Перевірка*:

,



*Відповідь:* , , .



**Приклад 5.** *Розв’язати систему лінійних рівнянь.*



*Розв’язання*. Знайдемо визначник 2-го порядку, складений із коефіцієнтів при відповідних невідомих першого і другого рівняння системи, який відмінний від 0.



Візьмемо тепер невідомі і за головні невідомі, а та за вільні невідомі. Запишемо систему у вигляді



,



.



Отже, загальний розв’язок системи лінійних рівнянь виражається формулами:



Знайдемо частинний розв’язок системи.

Якщо , то .



*Перевірка*.



*Відповідь*: Система має загальний розв’язок

, і один із частинних розв’язків: .



**Приклад 6**. *Встановити компланарність векторів заданих своїми координатами , ,* .



*Розв’язання*. Вектори компланарні, якщо вони лежать в одній площині, або паралельні одній площині. З іншого боку, щоб встановити компланарність 3-х векторів , достатньо показати, що їх мішаний добуток дорівнює 0. Тобто, якщо , , , то мішаний добуток обчислюється за формулою



.



Обчислюємо мішаний добуток векторів, заданих в умові задачі



*Відповідь*: Вектори ,, компланарні.



***Вправи для аудиторної і самостійної роботи***

І. *Обчислити визначники*:

1) ; 2) ; 3) ; 4);



5); 6); 7) ; 8) ;



9) ; 10); 11)



ІІ. *Розв’язати рівняння та нерівності*

1); 2); 3);



4); 5) ; 6);



7); 8); 9).



ІІІ. *Розв’язати системи рівнянь*

1); 2) ;



3); 4);



5) 6)



7) 8\*).



ІV. *Помножити визначники*

а), б);



в), г).



V. *Довести рівності*:

а) ;



б) .



***Відповіді***

**І. 1)** 180; **2)** 60; **3)** 60; **4)** -17; **5)** -303; **6)** 8; **7)** ; **8)** -1;



**9)** ; **10)** ;



**11)** .**ІІ. 1**) ; **2)** -1; 2; **3)** ; **4)** 2; -1 **5)** 2; ; **6)** ; **7)** 1; ; **8)** ; **9)** .**ІІІ. 1)**  ; **2)** ; **3)** ; **4)** ; **5)**  ; **6)**; **7)** ; **8)** . Вказівка. Позначити , , . **ІV. а)** -234; **б) 0; в)** 0; **г)** 0**.**



***Індивідуальні завдання***

I. Обчислити визначники матриць:

1. 2. 3.



4. . 5. . 6. .



7. . 8. . 9. .



10. . 11. . 12. .



13. . 14. . 15. .



16. . 17. . 18. .



19. . 20. . 21. .



22. . 23. . 24. .



25. . 26. . 27. .



28. . 29. . 30. .



IІ. Розв’язати системи лінійних рівнянь за формулами Крамера та виконати перевірку:

1. 2. 3.



4. 5. 6.



7. 8. 9.



10. 11. 12.



13. 14. 15.



16. 17. 18.



19. 20. 21.



22. 23. 24.



25. 26. 27.



28. 29. 30.



# Практичне заняття 3

# *Визначники го порядку, їх обчислення за найпростішими властивостями.*



# *Мінори –го порядку, їх алгебраїчні доповнення.*



***Основні теоретичні відомості***

([1]. с.331–370. [2], с. 37–59. [3], с. 26–44.)

**Означення 1**. *Визначником –го порядку матриці називається алгебраїчна сума усіх можливих членів, кожний з яких є добутком елементів, взятих по одному і тільки по одному із кожного рядка і кожного стовпця матриці ; при цьому добуток береться із знаком* ***«+»****, якщо індекси його елементів утворюють парну підстановку і із знаком* ***«−»****, – якщо непарну.*



**Означення 1'**. *Визначником –го порядку матриці називається алгебраїчна сума усіх можливих членів, кожний з яких є добутком елементів, взятих по одному і тільки по одному з кожного рядка і кожного стовпця матриці ; знак члена визначається множником , де – число інверсій у подвійній перестановці (підстановці) індексів елементів даного члена.*



У цьому випадку загальний член визначника має вигляд:

,



а визначник

.



**Означення 2.** *Визначником –го порядку матриці називається алгебраїчна сума усіх можливих членів, кожний з яких є добутком елементів, взятих по одному і тільки по одному з кожного рядка і кожного стовпця матриці ; знак члена визначається множником , де – число інверсій у перестановці других індексів елементів даного члена, якщо він упорядкований за першими індексами.*



У цьому випадку загальний член визначника можна подати у вигляді:

,



а визначник

.



Перші індекси – номери рядків у кожному члені нормально упорядковані. Другі індекси – номери стовпців – у кожному члені утворюють якусь з перестановок з чисел ***.*** Число інверсій у кожній такій перестановці позначено . Тоді підстановка індексів матиме вигляд:



.



Число інверсій підстановки індексів дорівнює числу інверсій перестановки других індексів і визначає знак члена визначника.

[det. (від англ. determinant) – функція, яка ставить у відповідність квадратній матриці деяке число ].



**Означення 3*.*** *Мінором* ***–****го порядку матриці* ***–****го порядку , називається визначник матриці* ***–****го порядку, утворений з матриці викреслюванням* ***–****го рядка та* ***–****го стовпчика, тобто*



**Означення 4.** *Алгебраїчним доповненням елемента матриці* ***–****го порядку називається мінор* ***–****го порядку помножений на , тобто .*



**Теорема 1*.*** *Визначник, у якого всі елементи –го рядка, крім , дорівнюють нулю, дорівнює добутку цього елемента на його алгебраїчне доповнення , тобто*



**Теорема 2***.* *Визначник –го порядку дорівнює сумі попарних добутків елементів будь–якого рядка на відповідні їм алгебраїчні доповнення (це виконується і для стовпців).*



*Тобто (за рядками),*



*або (за стовпцями*)



Щоб обчислити визначник на основі означення, треба знайти величину членів, кожний з яких дістанемо за допомогою операцій множення. Отже, ***.*** Таким чином, для визначника 10–го порядку . Тому для обчислення визначників означенням користуються тільки в окремих випадках.



Розглянемо практичні способи обчислення визначників.

*Спосіб мінорів*

Теорема 2 дає можливість змогу зводити обчислення визначника –го порядку до обчислення визначників –гопорядку.



(17)



(18)



Уміючи обчислювати алгебраїчні доповнення, які є визначниками –го порядку, можна обчислити і визначник за однією з цих формул. Обчислення визначників –го порядку аналогічно зводимо до обчислення визначників –гопорядку і т.д., поки не дійдемо до визначників –го чи –го порядку, обчислювати які вже легко.



*Спосіб нулів*

Якщо у визначнику всі елементи якогось рядка (стовпця), крім одного, дорівнюють нулю, то даний визначник дорівнює добутку відмінного від нуля елемента цього рядка (стовпця) на його алгебраїчне доповнення.



Практично для обчислення визначника способом нулів виконують лінійні перетворення над рядками (стовпцями), які нагадують лінійні перетворення, застосовні у методі Гауса.

Для перетворення визначника способом нулів доцільно вибирати рядок чи стовпець, який вже містить нулі, або ті рядки і стовпці, елементи яких – невеликі числа і мало відрізняються одне від одного. Найкраще за брати елемент, який дорівнює одиниці, якщо такий є серед елементів визначника. У цьому випадку множники дорівнюватимуть числам , що звичайно, спрощує обчислення. Якщо серед елементів визначника немає **1**, то такий елемент можна досить легко утворити за допомогою операцій додаванням і множення, не змінюючи величини визначника.



*Властивості визначників*

1. Якщо у визначнику –го порядку поміняти місцями два рядки (стовпчики), то визначник поміняє знак на протилежний.



2. Якщо у визначнику є два однакові рядки (стовпчики), то цей визначник дорівнює нулю.

3. Якщо у визначнику –го порядку всі елементи одного з рядків помножити на число , то і величина визначника помножиться на це число.



4. Визначник, у якого відповідні елементи двох рядків пропорціональні, дорівнює нулю.

5. Якщо елементи –го рядка визначника –го порядку є сумами двох доданків:



**,**



то цей визначник можна подати як суму двох визначників –го порядку: , де і – визначники, утворені з заміною елементів –го рядка відповідно першими або другими доданками цих елементів:



; .



6. Якщо до елементів якогось рядка визначника –го порядку додати відповідні елементи іншого рядка, помножені на одне й те саме число, то величина визначника не зміниться.



***Зауваження.*** Так як може бути меншим за ***0***, то визначник не змінюється при відніманні одного рядка від іншого.



7. Визначник –го порядку при транспонуванні матриці не змінює своєї величини.



,



8. Якщо всі елементи якогось визначника дорівнюють нулю, то і сам визначник дорівнює нулю.

9. Якщо у визначнику один із рядків буде лінійною комбінацією інших рядків, то визначник дорівнює нулю.

Для квадратичних матриць поряд з поняттям мінора вводиться поняття доповнюючого до нього мінора. Нехай дано квадратична матриця і її мінор порядку . Мінором  *доповнюючим* до мінора , називається визначник матриці, одержаної із даної викреслюванням тих її  рядків і  стовпців, які входять в мінор . Мінори квадратичної матриці називаються також мінорами її визначника. *Алгебраїчним доповненням мінора* називається доповнюючий до нього мінор, взятий із знаком , де  – сума номерів тих рядків і стовпців даної матриці, які входять в мінор, що розглядають.

**Теорема 3 (Лапласа)**. *Визначник –го порядку дорівнює сумі добутків всіх можливих мінорів –го порядку , які можна скласти із довільно вибраних  рядків і  стовпців, на алгебраїчні доповнення цих мінорів.*

*Зауваження*. Теорема Лапласа дозволяє розкласти визначник –го порядку за декількома рядками (стовпцями). Вона дає можливість зводити обчислення визначника –го порядку за декількома рядками (стовпцями). Вона дає можливість зводити обчислення визначників –го порядку до обчислення декількох визначників –го і –го порядків. Цих нових визначників може виявитися багато (при великому ), тому застосовувати теорему Лапласа доцільно лише в тих випадках, коли в даному визначнику є такі рядки або стовпці, що більшість із відповідних мінорів –го порядку або доповнюючих до них мінорів дорівнюють нулю.

***Питання для самоперевірки***

1. Сформулюйте визначення визначника n-го порядку?

2. Які властивості має визначник n-го порядку?

3. Чому дорівнює число членів визначника n-го порядку?

4. Чому може дорівнювати визначник n-го порядку, в якому лише n елементів відмінних від нуля?

5. Як зміниться визначник матриці n-го порядку, якщо всі її елементи замінити на протилежні?

6. Як зміниться визначник матриці n-го порядку, якщо:

а) будь-які два рядки(стовбці) поміняти місцями;

б) перший стовпець поставити на останнє місце, а решту зсунути вліво, зберігаючи їх розташування;

в) стовпці записати в зворотному порядку;

г) до останнього стовпця додати всі інші;

д) до кожного рядка, починаючи з другого, додати попередній?

1. Який мінор називають доповнюючим?
2. Що називається алгебраїчним доповненням мінора?

9. Сформулюйте теорему Лапласа.

***Методичні вказівки до розв’язання задач***

**Приклад 1**. *Обчислити визначники*.

,



утворивши нулі у третьому стовпці.

*Розв’язання.* Застосовуючи властивість 6 визначника, утворимо якомога більше нулів у третьому стовпці. Для цього помножимо перший рядок на (–4) і додамо до третього, до четвертого рядка додамо перший.

.



У третьому стовпці відмінний від нуля лише один елемент . Тому цей визначник дорівнює



.



Отже, одержано визначник третього порядку, який можна обчислити за правилом трикутника(Саррюса), або ще один раз застосувати властивість 6.



*Відповідь*: .



**Приклад 2.** *Обчислити визначник*

.



*Розв’язання*. Розкладемо визначник за елементами другого рядка.



.



*Відповідь*: .



**Приклад 3***.* *Обчислити визначник*

.



*Розв’язання*.

[властивість 5]=



=



+







.



*Відповідь*: .



**Приклад 4***.* *Обчислити визначник методом зведення його до трикутного вигляду.*

.



*Розв’язання*. За властивостями визначника -го порядку виконуємо елементарні перетворення над рядками визначника і зведемо визначник до трикутного вигляду.



=



==



==





*Відповідь*: .



**Приклад 5**. *Обчислити визначник*

.



*Розв’язання*. Елементи першого стовпця є сумами двох доданків, тому за властивістю 5, даний визначник запишемо як суму двох визначників

.



У першому визначнику перший і четвертий стовпці пропорційні, у другому визначнику перший і третій стовпці пропорційні. Отже, за властивістю 4 обидва визначники дорівнюють нулю, а отже, .



*Відповідь:* .



**Приклад 6.** *Обчислити визначник –го порядку.*



.



*Розв’язання*. За властивістю 5 елементи останнього рядка подамо у вигляді сум .



Тоді

.



У першому визначнику під головною діагоналлю нулі, тому він дорівнює добутку елементів головної діагоналі, тобто Другий визначник дорівнює нулю, так як у нього перший і останній рядки пропорційні. Отже,



*Відповідь:*



**Приклад 7**. *Обчислити визначник –го порядку.*



.



*Розв’язання.* Виконаємо елементарні перетворення над стовпцями визначника за властивістю 6. До першого стовпця додамо другий, помножений на (–1), до другого стовпця додамо третій, помножений на (–1), до третього – четвертий і т.д., на кінець, до передостаннього стовпця додамо останній, помножений на (–1). В результаті одержимо

.



Перший рядок додамо послідовно до всіх інших рядків. Одержуємо

.



*Відповідь*: .



**Приклад 8***. Обчислити визначник –го порядку*



.



*Розв’язання*. Додамо до останнього стовпця попередні стовпці

.



Винесемо за ознакою визначника спільний множник елементів останнього стовпця та віднімемо від попередніх стовпців останній стовпець, помножений на . Отримали визначник трикутного вигляду, у якого елементи, що знаходяться вище побічної діагоналі, дорівнюють нулю.



.



*Відповідь*: .



**Приклад 9.** *Обчислити визначник*

.



*Розв’язання*. Якщо до першого стовпця додати всі інші, то побачимо, що даний визначник ділиться на ; якщо до першого стовпця додати другий і відняти третій та четвертий, то виділиться спільний множник ; якщо до першого стовпця додати третій і відняти другий та четвертий, то виділиться множник ; накінець, якщо до першого стовпця додати четвертий і відняти другий та третій, то виділиться множник . Вважаючи незалежними невідомими, робимо висновок, що всі ці чотири множники попарно взаємно прості, а отже визначник ділиться на їх добуток .



Цей добуток утримує член з коефіцієнтом –1, а сам визначник утримує той же член з коефіцієнтом +1. Отже,







.

**Приклад 10.** *Обчислити визначник застосовуючи теорему Лапласа*

.

*Розв’язання.* Виділимо третій та п’ятий стовпці які утримують нулі. Із елементів цих стовпців можна скласти ряд мінорів другого порядку.

Застосовуючи теорему Лапласа, розкладемо визначник  за мінорами третього і п’ятого стовпців.





.

Якщо у визначнику  головну діагональ покривають дві матриці без спільних елементів з визначниками  та  і по одну сторону від них всі елементи рівні нулю, то .

**Приклад 11***.* *Обчислити визначник.*

.

Теорема Лапласа дозволяє добуток двох визначників будь–якого порядку представити у вигляді визначника.

.

при будь–яких .

Якщо маємо ступінчатий визначник , тобто на головній діагоналі його стоїть ланцюжок квадратних матриць з визначниками , а по одну сторону від цього ланцюжка всі елементи дорівнюють нулю, то .

**Приклад 12**. *Обчислити визначник*



*Розв‘язання*. 

***Вправи для аудиторної і самостійної роботи***

І. *Обчислити визначники, розкладаючи за елементами рядка або стовпця.*

а), б), в); г)д) , е); є).



ІІ. *Не обчислюючи визначників, перевірити, що вони діляться на*



а), б), в).



ІІІ. *Обчислити визначники, користуючись властивістю 3 та іншими.*

а), б).



VІ. *Обчислити визначники*.

1. 2)



1. ; 4) ;



5);6)7);



8) 9) ;10)



11) ; 12) ; 13);

14)  15) .

V. *Обчислити квадрат визначників.*

а) ; б) .

***Відповіді***

**І*.* 1) а) ; б)** 150; **в)** -6; **г)** 5; **д)** 52; **е)** ; **є)** ; **ІІІ. а)** ; **б)** ; **VІ. 1)** ; **2)** ; **3)** ; **4)** 0; **5)** ; **6)** 0; **7)** 0; **8)** 0; **9)**  ; **10)**  -729; **11)** 1000; **12)** -6**; 13)** ; **14)** 12; **15)** 8.**V. а)** 256; **б)** .



***Індивідуальні завдання***

1. Обчислити визначники:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. |  | 7. |  | 13. |  |
| 2. |  | 8. |  | 14. |  |
| 3. |  | 9. |  | 15. |  |
| 4. |  | 10. |  | 16. |  |
| 5. |  | 11. |  | 17. |  |
| 6. |  | 12. |  | 18. |  |

Обчислити коефіцієнти при в розкладах визначників:



|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 19. |  | 25. |  |
| 20. |  | 26. |  |
| 21. |  | 27. |  |
| 22. |  | 28. |  |
| 23. |  | 29. |  |
| 24. |  | 30. |  |

ІI. Обчислити визначники:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. | 11. | 21. |
| 2. | 12. | 22. |
| 3. | 13. | 23. |
| 4. | 14. | 24. |
| 5. | 15. | 25. |
| 6. | 16. | 26. |
| 7. | 17. | 27. |
| 8. | 18. | 28. |
| 9. | 19. | 29. |
| 10. | 20. | 30. |

# Практичне заняття 4

# *Обчислення визначників го порядку. Теорема Лапласа. Правило Крамера для розв’язування систем лінійних рівнянь з невідомими. Метод рекурентних співвідношень. Застосування визначників в геометрії.*



***Основні теоретичні відомості***

([1], с.331–370, [2], с. 37–59., [3], с. 26–44 )

*Метод* *рекурентних співвідношень.* Цей метод полягає в тому, що даний визначник, виражають, перетворюють і розкладають його за елементами рядка або стовпця, через визначники такого ж вигляду, але більш нижчого порядку. Одержану рівність називають рекурентним співвідношенням.

Далі обчислюють за загальним виглядом визначника стільки визначників нижчих, скільки їх було у правій частині рекурентного співвідношення. Якщо необхідно одержати вираз для визначника будь–якого порядку , то, обчислюючи із рекурентного співвідношення декілька визначників більш низького порядку, стараються замітити загальний вигляд шуканого виразу, а потім доводять справедливість цього виразу при будь–яких за допомогою рекурентного співвідношення і методу математичної індукції.



*Спеціальний випадок рекурентних співвідношень.*

Нехай рекурентне співвідношення має вигляд

,



де і сталі (тобто не залежать від ) числа. В цьому випадку можна вивести формулу для обчислення .



Якщо , то , де – визначник першого порядку даного вигляду.



Якщо , то розв’язуємо квадратне рівняння . Нехай і – корені рівняння. Якщо то , де



, ,



, – визначники першого і другого порядку даного вигляду. Вирази для і можна знайти безпосередньо із рівностей



, .



Якщо , але то



,



де

, .



Розглянемо систему лінійних рівнянь з невідомими:



причому, визначник системи, складений з коефіцієнтів при невідомих, .



.



Тоді задана система має єдиний розв’язок, який можна знайти за допомогою визначників.

**Теорема 1***:* *Якщо в СЛР число невідомих дорівнює числу рівнянь і визначник системи відмінний від нуля, то система має єдиний розв’язок, який можна знайти за формулами Крамера.*

*Висновок****.*** Якщо в СЛР число рівнянь дорівнює числу невідомих, то

1) якщо , то система сумісна і визначена;



2) якщо , а серед є відмінні від нуля, то система несумісна;



3) якщо і , то система сумісна і невизначена.



*Зауваження****.*** Якщо в системі лінійних однорідних рівнянь всі і, то система має єдиний нульовий розв’язок; якщо , то система має безліч розв’язків, тобто має ненульові розв’язки.



**Теорема 2.** *Для того, щоб система лінійних однорідних рівнянь з невідомими мала нетривіальні розв’язки, необхідно і достатньо, щоб детермінант цієї системи дорівнював нулю.*



Застосування визначників у аналітичній геометрії:

1. Площа трикутника з вершинами , , обчислюється за формулою:



,



де знак обирається однаковим зі знаком визначника.

2. Умова, при якій точки , , лежать на одній прямій:



.



3. Рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки: , :



.



4. Умова, при якій три прямі , , перетинаються в одній точці:



.



5. Рівняння площини, яка проходить через точки , , .



.



6. Рівняння площини, яка проходить через точку паралельно вектору і перпендикулярно площині :



.



7. Об’єм трикутної піраміди з вершинами в точках , , , обчислюється:



.



8. Точки , , , лежать в одній площині, якщо:



.



9. Площа трикутника з вершинами в точках , , дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах і , тобто половині модуля векторного добутку векторів і .



Оскільки, векторний добуток



Так як векторним добутком двох векторів є третій вектор, координати якого можна позначити як , то



***Питання для самоперевірки***

1. В чому полягає метод рекурентних співвідношень?

2. Як скласти визначник системи?

3. В якому випадку СЛР має єдиний розв’язок, який можна знайти за формулами Крамера?

4. Яка необхідна і достатня умова того, що система ** лінійних однорідних рівнянь з ** невідомими має нетривіальні розв’язки?

5. Перерахуйте задачі аналітичної геометрії, при розв’язанні яких застосовують поняття визначника.

***Методичні вказівки до розв’язання задач***

**Приклад 1.** *Обчислити визначник –го порядку*.



.



*Розв’язання.* Розкладемо визначник за елементами першого рядка:

.



Аналогічно і т.д. Таким чином,



.



Враховуючи, що

; ;



одержимо вираз для :



.



*Відповідь*:.



**Приклад 2***.*

**Приклад 5**. *Обчислити визначник*

, .



*Розв’язання*. За властивістю 5 елементи першого стовпця подамо у вигляді сум , , , …, .



.



Другий із цих визначників після розкладу за елементами першого стовпця дає вираз , де – визначник такого ж вигляду, як і даний, але на одиницю меншого порядку.



Виконаємо перетворення у першому визначнику за властивістю 6. Перший стовпець помножимо на і додамо до другого стовпця, одержаний другий стовпець помножимо на і додамо до третього стовпця і т.д. В результаті одержимо такий визначник



.



В результаті виконаних перетворень одержуємо:

.

співвідношення, яке пов’язує даний визначник го порядку з визначником такої ж структури го порядку. Співвідношення такого типу називають *рекурентними*.



Повертаючись до визначника типу при малих знаходимо



, .



Одержані результати можна записати в такому вигляді

, , .



Знайдені значення підказують нам, що для будь–якого справедлива формула



.

Справедливість даної формули можна довести методом математичної індукції, використовуючи знайдене рекурентне співвідношення. Припустимо, що остання формула справедлива для , тобто



.



Тоді .



Отже, якщо ця формула справедлива для , то вона справедлива і для , тобто для всіх . Вираз при знайдено.



Якщо , то



*Відповідь*: .



**Приклад 6**. *Обчислити визначник*

.



*Розв’язання*. Рекурентне співвідношення:

.



Знаходимо

, , , ,



або , , , .



Знайдені визначники обчислюються за формулою

.



Доведемо справедливість формули методом математичної індукції по числу . Для , формула правильна; допускаючи її правильність для всіх , тобто , із рекурентного співвідношення маємо



.



**Приклад 7**. *Обчислити визначник Якобі* *го порядку*:



*Розв’язання*. Розкладемо даний визначник за елементами першого рядка





.



Отже, рекурентне співвідношення має вигляд:

.



Розв’яжемо рівняння . Корені рівняння: . Далі знаходимо , . Знаходимо і із системи рівнянь



Отже, , .



*Відповідь*: .



**Приклад 8**. *Розв’язати систему лінійних рівнянь за формулами Крамера*:



*Розв’язання.* Складемо визначник із коефіцієнтів при невідомих системи:

.



Система має єдиний розв’язок. Знаходимо :



, ,



, .



За формулами Крамера, обчислимо



, ,



, .



*Відповідь*: .



**Приклад 9**. *Розв’язати рівняння*

.



*Розв’язання.* За означенням визначника, кожен його член повинен містити точно по одному елементу з кожного рядка і кожного стовпця. Оскільки у першому стовпці змінної немає, а в усіх інших вони є тільки у першому степені, то дане рівняння має степінь не вище 4.



При перший і другий стовпці визначника пропорційні, тобто визначник дорівнює нулю. Аналогічно, визначник дорівнює нулю при (перший і третій стовпці пропорційні), при (перший і четвертий стовпці пропорційні) та при (перший і п’ятий стовпці пропорційні). Оскільки дане рівняння не може мати більш як чотири корені, то числа є шуканими коренями рівняння.



***Вправи для аудиторної і самостійної роботи***

І. *Обчислити визначник*:

а) б) .

в) ; г) ;



д) ; е) ;



є) ;ж) ;



з) ; и) ;



і) .



ІІ. *Розв’язати системи лінійних* *рівнянь за формулами Крамера та виконати перевірку.*

а); б)



в) г) .



ІІІ. Застосувати визначники до розв’язання геометричних задач:

1). Обчислити площу трикутника з вершинами , , .



2). Чи лежать точки , , на одній прямій?



3) Дано точки , . На прямій вибрати точку так, щоб площа була рівною 4 кв. од.



4). Скласти рівняння прямої, яка проходить через точки , . Чи проходить пряма через точку перетину прямих: , .



5). Знайти рівняння площини, яка проходить через три точки:

а) , , .



б) , , .



***Відповіді***

**ІІ. а)** ; **б)** *Вказівка*: відняти від кожного рядка попередній починаючи з останнього і закінчуючи другим рядком. при  та  при ; в**)** ; **г)** *Вказівка*. *Із кожного стовпця, починаючи з першого, відняти послідуючий, потім подати у вигляді суми двох визначників за останнім стовпцем*; **д)** ; **е)***;* **є)** 1; **ж)** ; **з)** ; **и)** ; **і)** *Вказівка.* *Розклад визначника за елементами першого стовпця і (другий рад) за елементами останнього стовпця дає два різних рекурентних співвідношень*. . **ІІ. а)** ; **б) ,** ; **в)** ; **г)** ; **ІІІ. 1).** 3; **2)** так; **3)** (-2;-8) та; **4) ,** так; **5) а) ; б) .**



***Індивідуальні завдання***

I. Розв‘язати сиcтеми лінійних рівнянь за формулами Крамера та виконати перевірку:

1. 2.



3. 4.



5. 6.



7. 8.



9. 10.



11. 12.



13. 14.



15. 16.



17. 18.



19. 20.



21. 22.



23. 24.



25. 26.



27. 28.



29. 30.



II. Розв‘язати сиcтеми лінійних рівнянь за формулами Крамера та виконати перевірку:

1. 2.



3. 4.



5. 6.



7. 8.



9. 10.



11. 12.



13. 14.



15. 16.



17. 18.



19. 20.



21. 22.



23. 24.



25. 26.



27. 28.



29. 30.



# Практичне заняття 5

# *Операції над матрицями. Ранг матриці.*

# *Обчислення оберненої матриці.*

***Основні теоретичні відомості***

([1], с. 370 – 389., [2], с. 89–109, [3], с. 26–44, 48-72, [4], с. 71-82.).

Означення матриці наводилося в теоретичних відомостях до практичного заняття №1.

Дві матриці *рівні між собою*, якщо вони мають однаковий розмір і всі їх відповідні елементи рівні між собою.

Елементи з двома однаковими індексами  утворюють *головну діагональ* матриці. Якщо , то матриця називається *симетричною.*

**Означення 1**. *Сумою матриць одного й того самого порядку  і  називається матриця ; , будь-який елемент якої дорівнює сумі відповідних елементів матриць  і : .*



**Означення 2.** *Добутком матриці на деяке число , називається така матриця , кожен елемент якої утворюється множенням відповідних елементів матриці на , .*



**Означення 3.** *Добутком матриці розміру на матрицю розміру називається така матриця розміру , , кожний елемент якої можна знайти за формулою:* ***.***



Кожний елемент матриці утворюється як сума добутків відповідних елементів –го рядка матриці на відповідні елементи –го стовпця матриці , тобто за схемою:



В результаті множення дістанемо матрицю розміру .



З означення випливає, що добуток матриць *некомутативний:* .



Матриця називається *невиродженою,* якщо система її рядків лінійно незалежна, і *виродженою*, якщо між її рядками існує лінійна залежність.



Матриця називається *оберненою* по відношенню до матриці , якщо *.*



Обернена матриця позначається . Тоді .



Поняття оберненої матриці вводиться тільки для квадратних матриць.

*Метод Гаусса–Жордана* знаходження матриці, оберненої до даної квадратної матриці. Для цього складають блочну матрицю і виконують елементарні перетворення над рядками «здвоєної» матриці ( яка має рядків та стовпців). В результаті елементарних перетворень над рядками матриці одержують матрицю .



*Другий спосіб обчислення оберненої матриці*

1) Обчислимо визначник матриці . Якщо , то матриця має обернену.

2) Складемо матрицю  із алгебраїчних доповнень  елементів матриці .

3) Транспонуємо матрицю , одержимо приєднану матрицю .

4) Знайдемо обернену матрицю, поділивши всі елементи приєднаної матриці на визначник : 

*Зауваження****.*** Для невироджених квадратних матриць Times New Roman
14
16777215
0
A=mat22(a,b,c,d)      A^(-1)=(1/(a*d-b*c))*mat22(d,-b,-c,a)   другого порядку можна вказати правило знаходження оберненої матриці, яке випливає із другого способу:

а) поміняти місцями елементи на головній діагоналі;

б) поміняти знаки у елементів побічної діагоналі;

в) поділити одержану матрицю на визначник .

В результаті одержимо обернену матрицю



Нехай  – матриця розмірності ,  – натуральне число, яке не перевищує : . *Мінором k – го порядку* матриці називається визначник матриці  –го порядку, утворений елементами, які стоять на перетині довільно вибраних  рядків і  стовпців матриці . В позначенні мінора, номери вибраних рядків будемо вказувати верхніми індексами, а вибраних стовпців – нижніми, розташовуючи їх у по рядку зростання.

В матриці розмірності мінор –го порядку називається *базисним*, якщо він відмінний від нуля, а всі мінори -го порядку рівні нулю або взагалі їх не існує.



*Рангом матриці*називається порядок базисного мінора. Позначення: , .



*Зауваження 1.* Якщо у матриці всі мінори –го порядку рівні нулю, то рівні нулю і мінори більш високого порядку.



*Зауваження 2*. Ранг матриці дорівнює найбільшому порядку відмінного від нуля мінора цієї матриці.

*Зауваження 3.* Якщо квадратна матриця невироджена, то її ранг дорівнює її порядку.

**Теорема (про ранг матриці).** *Ранг матриці дорівнює максимальному числу лінійно незалежних рядків матриці.*

*Наслідок.* Максимальне число лінійно незалежних рядків матриці дорівнює максимальному числу лінійно незалежних стовпців:

.



*Метод елементарних перетворень*знаходження рангу матриці полягає в тому, що матрицю А зводять до ступінчатого виду за допомогою елементарних перетворень; кількість ненульових рядків одержаної ступінчатої матриці є шуканий ранг матриці А.

*Метод обвідних мінорів* знаходження рангу матриці полягає в наступному. Необхідно:

1) Знайти який-небудь мінор першого порядку (тобто елемент матриці), відмінний від нуля. Якщо такого мінора не існує, то матриця нульова і .



2) Обчислювати мінори другого порядку, які утримують (обвідні ) до того, поки не знайдеться мінор , відмінний від нуля. Якщо такого мінора не існує, то , якщо є то .



3) Обчислювати (якщо вони існують) мінори –го порядку, обвідні мінора . Якщо таких мінорів не існує, або вони всі рівні нулю, то ; якщо хоча б один з мінорів , то , і процес продовжується.



При знаходженні рангу матриці таким способом достатньо на кожному кроці знаходити тільки один ненульовий мінор –го порядку, слід шукати його лише серед мінорів, які утримують мінор .



***Питання для самоперевірки***

1. Сформулюйте визначення матриці.
2. Як знайти суму матриць?
3. Сформулюйте правило за яким матрицю множать на число.
4. Як знайти добуток матриць.
5. Що називається рангом матриці?
6. Якщо матриці і можна помножити, чи випливає з цього, що їх можна додавати?



1. Якщо матриці  і  можна додавати, чи випливає з цього, що їх можна множити?
2. Чи можна множити квадратну матрицю на неквадратну?
3. Чи може бути добуток двох неквадратних матриць бути квадратною матрицею?
4. Чи можна при множенні ненульових матриць одержати нульову матрицю?
5. Чи можуть співпадати  і ?
6. Який вигляд має ?

13. Які з рівностей вірні:

а) ?



б) ?



в) ?



г) ?



д)?



14. Яка матриця може мати обернену матрицю?

15. Обернена матриця та способи її обчислення.

16. Які елементарні перетворення виконуються над матрицею  щоб знайти обернену до ?

17. Яка матриця називається приєднаною?

18. Перелічить властивості оберненої матриці.

***Методичні вказівки до розв’язання задач***

**Приклад 1**. *Знайти , якщо*



.



*Розв’язання.* Складемо матрицю тобто



.



Помножимо другий рядок матриці на і додамо до першого рядка



.



Перший і третій рядки залишаємо без зміни, а від другого віднімаємо почетверений перший рядок.



Поміняємо місцями другий і третій рядки



Перший та другий рядки залишаємо без зміни, а від третього рядка віднімаємо другий рядок, збільшений у 27 разів.



Поділимо останній рядок на (–43).



Подвоєний третій рядок віднімаємо від другого рядка і додамо до першого рядка



Другий рядок помножимо на 5 і додамо до першого рядка



Справа від лінії утворилася одинична матриця, тоді зліва повинна стояти матриця .



**Приклад 2*.*** *Дано матрицю*

*.*



*Знайти .*



*Розв’язання*. Обчислимо визначник матриці .



Знайдемо алгебраїчні доповнення до елементів матриці .



Складемо матрицю

.



Транспонуючи матрицю , одержимо приєднану матрицю .



Поділимо всі елементи приєднаної матриці на визначник , одержимо обернену матрицю:



**Приклад 3.** *Обчислити обернену матрицю до матриці*

.



*Розв’язання.* Для обчислення оберненої матриці застосуємо метод Гауса. Для цього за заданою квадратною матрицею



записують лінійне перетворення



Застосувавши метод Гауса, виразимо через . Матриця коефіцієнтів перетворення , що при цьому утвориться, і є оберненою до заданої матриці .



Запишемо лінійне перетворення щодо заданою за умовою матриці. Матимемо



Йому відповідає розширена матриця

.



Тут відіграють роль вільних членів. Отже, щоб дістати останню матрицю, досить до заданої матриці дописати стовпець з . Помноживши перший рядок на та і додавши послідовно до другого та третього рядків, дістанемо:



.



Помножимо елементи другого рядка на



.



Помножимо другий рядок на –6 і додамо до останнього:

.



Дістанемо трикутну систему



Звідки



Коефіцієнти при утворюють обернену матрицю .



.



**Приклад 4***.* *Записати мінори різних порядків матриці*



*Розв’язання.* Матриця розмірності має: 12 мінорів першого порядку, наприклад,



;



18 мінорів другого порядку, наприклад,

;



чотири мінори третього порядку, наприклад,

.



**Приклад 5***.* *Знайти ранг матриці методом обвідних мінорів і вказати один із базисних мінорів:*



*Розв’язання.* Так як у матриці є ненульові елементи, то . Знайдемо який-небудь ненульовий мінор 2-го порядку (якщо він існує). Таким мінором є , наприклад, . Отже, .



Обчислимо мінори 3-го порядку, обвідні :



=



.



Всі мінори 3-го порядку, обвідні , дорівнюють нулю, отже, .



Одним із базисних мінорів є

**.**



**Приклад 6.** *Методом елементарних перетворень знайти ранг матриці*:

.



*Розв’язання:* Методом елементарних перетворень зведемо матрицю до ступінчатого виду:



.



Ступінчата матриця має три лінійно незалежних рядки. Отже, .



**Приклад 7.** *Методом* *елементарних перетворень знайти ранг матриці:*

.



*Розв’язання.* Методом елементарних перетворень зведемо матрицю до ступінчатого виду:



.



Ступінчата матриця має три лінійно незалежних рядки. Отже, .



***Вправи для аудиторної і самостійної роботи***

І*. Знайти лінійну комбінацію матриць:*

а) , ;



б), , ,



;



**ІІ.** *Обчислити значення матричного многочлена , якщо*



а) , ,



б)  *.*



**ІІІ.** *Перевірити матриці А і В на комутативність*:

а) ;



б) , .



в) ;



г) , .



**IV\*.** Матриці та називаються переставними, якщо . Знайти всі матриці, переставні з матрицями:



а) ; б) ; в) ; г) .



**V.** *Знайти добуток матриць*  *і* :



а) , , .



б) , , .



**VІ.** *Обчислити ранг матриці методом елементарних перетворень.*

а), б) ;



в), г),



д), е).



**VIІ*.*** *Знайти ранг матриці методом обвідних мінорів і вказати один із базисних мінорів.*

а) , б) ,



в) , г) .



**VIIІ\***. *Знайти ранг матриці при різних значеннях параметра* .



а) ; б) ; в) ;



г) ; д) .



**IX.** *Знайти матрицю, обернену до матриці методом Гаусса:*



а) , б) ,



в) , г) .



**X.** *Методом елементарних перетворень обчислити матрицю, обернену до матриці :*



а) , б) , в) ;



г) , д\*);



е\*).



**XІ**.  *Знайти (методом мінорів) матрицю, обернену до даної:*

а) , б) , в) ,



г) , д) ..



***Відповіді***

І.**а) ; б)** ; **ІІ. а)** ; **б) ; IV\*. а) ; б)** ; **в)** ; **г)** , де - будь-які числа; **V. а) ; б) ; VІ. а)** 3**; б)** 3;**в)** 2; **г)** 3; **д)** 2; **е)** 2; **VII. а)** 2; **б)** 3; **в)** 3; **г)** 2; **VIIІ\*. а)** при ранг дорівнює 3, при решта значеннях λ ранг рівний 4**; б)** при λ= 0 ранг дорівнює 2, при λ≠0 ранг дорівнює 3; **в)** при λ=1 ранг рівний 1, при решта значеннях λ ранг рівний 4**; г)** при λ=3, ранг дорівнює 2, при λ≠3, ранг дорівнює 3; **д)** при λ=0,25 та λ=1 ранг рівний 3; при решта значеннях ранг рівний 4; **ІX. а)** ; **б)** ; **в)** ;



**г)** ; **X**. **а)** ; **б)** ;



**в)** ; **г)** ;



**д)**;



**е)** ; **XІ**. **а)** ;



**б)** ; **в)** ; **г)** ;



**д)** .



***Індивідуальні завдання***

**І .** Виконати дії над матрицями:

1. , , .



2. , ,



3. , , .



4. , , .



5. , , .



6. , , .



7. , , .



8. , , .



9. , , .



10. , , .



11. , , .



12. , , .



13. , .



14. , , .



15. , , .



16. , , .



17. , , .



18. , , .



19. , , .



20. , , .



21. , , .



22. , , .



23. , , .



24. , , .



25. , , .



26. , , .



27. , , .



28. , , .



29. , , .



30. , , .



**ІІ.** Знайти значення многочлена від матриці **:**



|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
| 1. |  |  | 16. | 16. |  |
| 2. |  |  | 17. |  |  |
| 3. |  |  | 18. |  |  |
| 4. |  |  | 19. |  |  |
| 5. |  |  | 20. |  |  |
| 6. |  |  | 21. |  |  |
| 7. |  |  | 22. |  |  |
| 8. |  |  | 23. |  |  |
| 9. |  |  | 24. |  |  |
| 10. |  |  | 25. |  |  |
| 11. |  |  | 26. |  |  |
| 12. |  |  | 27. |  |  |
| 13. |  |  | 28. |  |  |
| 14 |  |  | 29. |  |  |
| 15. |  |  | 30. |  |  |

**ІІІ.** Знайти ранг матриці**:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. | 2. | 3. |
| 4. | 5. | 6. |
| 7. | 8. | 9. |
| 10. | 11. | 12. |
| 13. | 14. | 15. |
| 16. | 17. | 18. |
| 19. | 20. | 21. |
| 22. | 23. | 24. |
| 25. | 26. | 27. . |
| 28. | 29. | 30. |

**ІV.** Знайти матрицю, обернену даній (трьома способами)**:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. . | 2. . | 3. . |
| 4. . | 5. . | 6. . |
| 7. . | 8. . | 9. . . |
| 10. . | 11. . | 12. . |
| 13. . | 14. . | 15. |
| 16. . | 17. . | 18. . |
| 19. . | 20. . | 21. . |
| 22. . | 23. . | 24. . |
| 25. . | 26. . | 27. . |
| 28. . | 29. . | 30. . |

# Практичне заняття 6

# *Розв’язування матричних рівнянь. Розв’язування систем лінійних рівнянь в матричній формі.*

***Основні теоретичні відомості***

([1], с. 370 – 389, [2], с.89–109, [3], с. 72–76.)

*Матричні рівняння* найпростішого виду з невідомою матрицею записуються так:



.



У записаних вище рівняннях матриці , , , такої розмірності, що виконуються операції множення тобто, , , , мають однакову розмірність і квадратні.



Якщо матриці і невироджені, то розв’язки рівнянь можна записати так:



Систему лінійних рівнянь з невідомими можна записати у матричній формі:



де



– матриця системи, – стовпець невідомих, – стовпець вільних членів.



Якщо матриця – невироджена, то система лінійних рівнянь сумісна і визначена, її розв’язок задається формулою



***Питання для самоперевірки***

1. Який вигляд мають матричні рівняння найпростішого типу?
2. Як записати систему лінійних рівнянь в матричній формі?
3. Записати формулу розв’язку системи лінійних рівнянь в матричній формі.
4. Які системи рівнянь можна розв‘язувати за допомогою оберненої матриці?

***Методичні вказівки до розв’язання задач***

**Приклад 1*.*** *Розв’язати матричне рівняння*:

.



*Розв’язання.* Позначимо матрицю

через , а матрицю через *.*



Матричне рівняння набуває вигляду:



Обчислимо визначник матриці *:*



.



Обчислимо алгебраїчні доповнення до елементів матриці :



Матриця має вигляд:



.



Зробимо перевірку:



.



Матриця обчислена вірно.



Знайдемо матрицю *.*



.



*Перевірка:*

.



Отже, матриця обчислена вірно.



**Приклад 2***.* *Розв’язати рівняння:*

*, де*



*Розв’язання.* Перетворимо ліву частину рівняння:

,



зведемо ліву частину до виду

, де



.



Отже, .



Обернену матрицю другого порядку знайдемо за формулою: якщо

, то .



**Приклад 3***.**Розв’язати матричне рівняння*

, *де*



, , .



*Розв’язання.* Знайдемо матриці, обернені до і .



.



.



**Приклад 4.** *Розв’язати рівняння*

, *де* , .



*Розв’язання.* Визначник матриці дорівнює нулю. Отже, не існує. Тому не можна використати формулу . Позначимо елементи матриці .



Підставимо у рівняння, одержимо

.



.



Враховуючи пропорційність рівнянь, у системі залишаємо тільки два рівняння із чотирьох. Виразимо невідомі *а* і *b*:



Отже, розв’язок матричного рівняння має вид:

,



де параметри і можуть набувати будь-яких значень. Таким чином, матричне рівняння має нескінченну множину розв’язків.



**Приклад 5***.* *Нехай* *, , .*

*Розв’язати матричне рівняння .*



*Розв’язання.* Складемо матрицю

.



Матричне рівняння матиме вигляд:

.



Виконаємо дії в лівій частині рівняння:

.



Склавши матричну рівність по елементах, одержимо систему лінійних рівнянь



Розв’яжемо систему, знайдемо , , , .



Отже, .



**Приклад 6***.* *Розв’язати систему лінійних рівнянь за допомогою оберненої матриці*



*Розв’язання.* Запишемо систему у матричному вигляді

.



Введемо позначення

, , .



Тоді



Знайдемо .



, .



.



Отже, , , .



*Перевірка:*



Система розв’язана правильно.

***Вправи для аудиторної і самостійної роботи***

І. *Розв’язати матричні рівняння:*

**1**.; **2**.;



**3.**; **4.** ;



**5.** ; **6.** ;



**7.** ; **8.** ;



**9.** ; **10**. **11.** ; **12.** ;



**13.** ; **14.** ;



**15.**; **16.** **17**. ;



**18.** ;



**19**. , де , , ;



**20.** , де , , ;



ІІ. *Розв’язати системи рівнянь методом оберненої матриці:*

**1**. **2**. **3.** **4.**  **5.** **6.**  **7.**  **8.**  **9.**  **10.**  , **11.** ,



**12.** , **13**\*.



**ІІІ**\*. *Розв’язати системи*

а)



б) .



***Відповіді***

**І. 1.**; **2.** ; **3. 4.** ;



**5.** ; **6.** ; **7.** ;



**8.** ; **9.** ; **10.** ; **11.** ; **12.** **; 13.** ; **14.** ; **15.** ; **16.** **;**



**17.** ; **18.** ; **19. ; 20.** . **ІІ.** **1.** ; **2.** ; **3.**  ; **4.** ; **5.** ; **6.** ; **7.** ; **8.** ; **9.** ; **10.**  ; **11.** ; **12.**  ; **13.** якщо , якщо , розв’язок залежить від одного параметра, в решті випадків система розв’язків не має.



**ІІІ. а)** , ; **б)** ;.



***Індивідуальні завдання***

**І.** Розв‘язати систему лінійних рівнянь матричним способом, зробити перевірку:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. | 2. | 3. |
| 4. | 5. | 6. |
| 7. | 8. | 9. |
| 10. | 11. | 12. |
| 13. | 14. | 15. |
| 16. | 17. | 18. |
| 19. | 20. | 21. |
| 22. | 23. | 24. |
| 25. | 26. | 27. |
| 28. | 29. | 30 |

**ІІ.** Розв‘язати матричне рівняння, зробити перевірку**:**

1. а) , ; .



б) , , ,..



2. а), , , ;



б) , , .



3. а) , , ;



б) , , .



4.а) **,** ,, .



б), , ,.



5. а), , , ;



б) **,** , .



6. а), , , ;



б) **,** , .



7. а) , , , ;



б) **,**  , .



8. а), , , ;



б) **,** , , .



9. а), , ,.



б) **,** , .



10. а), , , ;



б) **,**,, .



11. а) **,** , ;



б) ,,,



12. а), , , ;



б) **,** , ,.



13. а), , ,;



б) **,** , .



14.а), ,, ;



б) **,** ,,.



15. а),,,;



б) **,** , .



16. а), , , ;



б) **,** , .



17. а),,,;



б). **,** , .



18. а) ,,,;



б) **,** , .



19. а) **,** , .



б), , ,



20. а), , ,.



б) **,** , .



21. а),,,;



б) **,** , .



22. а), , , ;



б) , , .



23. а), ,,;



б) **,** , .



24. а) **,** , .;



б), ,,.



25. а), ,,.



б),,,;



26. а) **,** , ;



б).,,,



27. а) , , ;



б) **,** , , .



28. а),,,;



б) **,** , .



29. а) **,** , ;



б),,,.



30. а), ,,;



б) **,** , .



# Практичне заняття 7

# *Дії над комплексними числами в алгебраїчній формі.*

# *Спряжені комплексні числа.*

***Основні теоретичні відомості***

([1], с. 205-231, [2], с. 110 – 129; [4], с. 32-35).

Нехай ***С*** – множина всіх можливих упорядкованих пар  дійсних чисел  і **. Числа  і ** називатимемо компонентами пари  :  – *першою компонентою* , a  *– другою компонентою.*

Вважатимемо, що *пара  дорівнює парі  тоді і тільки тоді, коли  та , і в цьому випадку записуватимемо: .*

Відношення рівності пар має властивості *рефлексивності, симетричності* і *транзитивності:*

1. **;

2. Якщо **, то **;

3.Якщо ** і ** , то .

**Означення 1***. Сумою пар  і  називатимемо пару , тобто:*

**

**Означення 2**. *Добутком пар  і  називатимемо пару , тобто:*

**

Цим самим ми визначаємо в множині ***С*** всіх пар ** дійсних чисел дві алгебраїчні операції: *додавання і множення*.

**Теорема** *Множина* ***С*** *з визначеними в ній операціями додавання і множення є поле.*

**Означення 3.** *Комплексним числом*називається число виду , де . Число  називається *дійсною частиною* комплексного числа і позначають  або  а  - *уявною частиною*і позначають  або  від латинських  - дійсний і  - уявний.

**Означення 4.** *Комплексні числа виду  і  називаються спряженими. Комплексні числа виду  і  називаються* *протилежними*. Спряжене до комплексного числа  позначається .

***Властивості спряжених комплексних чисел***



**Означення 5.** *Два комплексних числа  та  вважаються рівними в тому і тільки тому випадку, якщо  і .*

*Зауваження***.** Щодо комплексних чисел не прийнято жодної угоди, яке з них вважати більшим.

Якщо , то комплексне число  називають *суто**уявним*. Дійсні числа є окремим випадком комплексних чисел, коли .

***Дії над комплексними числами***

***Додавання:.***

***Віднімання:***.

***Множення:***.

***Ділення ***





*x*

*a*

*b*

*A(a;b)*

0

Рис. 1

*y*

*Геометричне зображення комплексних чисел*

Із означення комплексного числа, як упорядкованої пари дійсних чисел, тобто точок площини , випливає, що між множиною комплексних чисел і множиною точок площини існує взаємно однозначна відповідність, тому можна дата геометричне тлумачення операцій над комплексними числами.

Візьмемо на площині декартову прямокутну систему координат . Довільному комплексному числу  поставимо у відповідність точку , а точці  – напрямлений відрізок площини  – радіус–вектор. Таким чином, між множиною всіх комплексних чисел і сукупністю всіх напрямлених відрізків площини, що виходять з початку координат, буде встановлено взаємно однозначну відповідність.

Очевидно кожному дійсному числу  відповідатиме відрізок, що лежить на дійсній осі , а кожному уявному числу — відрізок, що лежить на уявній осі *.*

***Питання для самоперевірки***

1. Дайте означення комплексного числа. Чому можна вважати, що множина дійсних чисел є підмножиною комплексних чисел?
2. Сформулюйте умову рівності комплексних чисел, заданих у алгебраїчній формі.
3. Дайте означення спряжених комплексних чисел. Яка властивість суми та добутку цих чисел?
4. Чи можуть бути спряженими: два дійсних числа? два чисто уявних? дійсне і уявне число?
5. Чи можна порівнювати: а)дійсні числа; б)комплексні числа?
6. Яке з чисел більше:  чи ?

***Методичні вказівки до розв’язання задач***

**Приклад 1.** *Знайдіть дійсні корені рівняння*

.

*Розв’язання:* Виконаємо дії в лівій частині рівняння і виділимо дійсну і уявну частини:



За означенням рівності двох комплексних чисел дістанемо:



Розв’язавши цю систему, визначимо 

**Приклад 2.** *Нехай*  *Обчислити* 

*Розв’язання:* За означенням операцій маємо:

,

,

,

.

**Приклад 3.** *Обчислити*  *та* , *якщо* .

*Розв’язання:*Так як , то.





**Приклад 4*.*** *Виконати дії і подати результат в алгебраїчній формі:* .

*Розв’язання:*Так як  то

* Відповідь*:.

**Приклад 5*.***

*Нехай *. *Записати в алгебраїчній формі вираз* .

*Розв’язання:*Згідно з означеннями дій над комплексними числами маємо:





**Приклад 6*.*** *Обчислити* .

*Розв’язання:* Нехай , де . Піднесемо до квадрату обидві частини рівності:  (пам’ятаємо, що ). Одержане рівняння рівносильне системі рівнянь



Піднесемо до квадрату кожне рівняння отриманої системи і додамо їх. Дістанемо наслідок цієї системи: ,

який перетворюється до вигляду . Тому на множині пар дійсних чисел дане рівняння рівносильне наступному рівнянню:

.

Якщо в систему рівнянь включити її наслідок, то дістанемо систему, рівносильну даній.



Отже, система має два розв’язки:  та . Вони дають два значення квадратного кореня.



**Приклад 7.** *Розв’язати рівняння* .

*Розв’язання:* Нехай  - корінь рівняння. Тоді

,

або .

Прирівнявши до нуля дійсну і уявну частини, дістанемо



Із другого рівняння випливає, що  (випадок  не підходить, так як рівняння  не має дійсних коренів). Підставивши  в перше рівняння, маємо  Отже, рівняння має два комплексних спряжених кореня .

**Приклад 8.** *Розв’язати рівняння* .

*Розв’язання:* За формулою коренів квадратного рівняння дістанемо

.

Аналогічно вище розв’язаній задачі знаходимо .

Тому .

*Відповідь*:

**Приклад 9.** Розв’язати систему рівнянь 

*Розв’язання:* При розв’язуванні системи застосуємо правило Крамера.





*Відповідь*:, .

**Приклад 10.** *Знайти всі значення , при яких комплексні числа  і  будуть спряжені.*

*Розв’язання:* За означенням спряжених комплексних чисел, запишемо: 

Перше рівняння системи має розв’язок .

Якщо , то .

Якщо , то .

Отже, якщо , то дані комплексні числа  і  будуть спряжені, а саме , .

*Відповідь*: .

**Приклад 11.** *Відомо, що число  є одним із коренів рівняння, *, де *. Знайти значення  та  і розв’язати рівняння при знайдених значеннях  і .*

*Розв’язання:* Так як  корінь рівняння, підставимо цей корінь у рівняння.



Розв’яжемо дане рівняння при  і .

*.*

Так як рівняння має парну степінь і один із коренів рівняння , то  також буде коренем рівняння. Отже, множник  входить до складу виразу . Поділимо останній вираз на  і запишемо розклад:





***Вправи для аудиторної і самостійної роботи***

І. Побудувати точки, що зображують комплексні числа:

а) 2; б) ; в) ; г) ; д) ; е) ; є).

ІІ. Дано комплексні числа:. Знайти:

а) ; б); в) ; г) ; д) ; е); є) ;

ж) ; з) .

ІІІ. Обчислити:

1. ; 2. ; 3.;

4.  ; 5. ; 6. ;

7. ; 8. ; 9. ;

10. ; 11. ; 12. ;

13. ; 14. ; 15. ;

16\*. , ; **17\*.** .

IV. Знайти дійсні корені рівнянь:

1. ; 2. ;

3. ; 4. ;

5. ; 6. ;

7. ; 8. ;

9. ; 10. .

V. Розв’язати систему рівнянь: а) ;

б) ; в) .

VI. Знайти комплексні числа, спряжені з даними:

а) 1; б) -3; в) ; г) ; д)  е)  є)  ж) 

VII. Обчислити:

а) ; б) ; в) ; г) ;

д) ; е) ; є) .

VIII. Розв’язати квадратне рівняння:

а). ; б). ;

в). ; г). ;

д). ; е). .

IX. Обчислити значення многочленів:

а)  при ;

б)  при ;

в)  при .

X. Скласти квадратне рівняння з дійсними коефіцієнтами, один із коренів якого дорівнює:

а) ; б); в) .

XI. Скласти квадратне рівняння за його коренями:

а)  б)  в) .

XІI. Знайти всі комплексні числа, спряжені своєму:

а) квадрату; б) кубу.

***Відповіді***

**ІІ.** а) ; б) ; в) ; г) ; д) ; е) ; є) ; ж) ; з) 5. **ІІІ. 1.** ; **2.** 4096; **3.** ; **4.** 1,6; **5.** ; **6.** ; **7.** 1; **8.** ; **9.** -14; **10.** ; **11.** ; **12.** ; **13.** ; **14.** ; **15.** ; **16.** ; **17.**  **. ІV. 1.** ; **2.** ; **3.** ; **4.** ; **5.** ; **6.** ; **7.** ; **8.** ; **9.** ; **10.** . **V. а)** , ; **б)** , ; **в)** , , ; **VІ. а)** 1; **б)** -3; **в)** ; **г)** ; **д)** ; **е)** ; **є)** ; **ж)** . **VІІ. а)** ; **б)** ; **в)** ; **г)** ; **д)** ; **е)** ; **є)** . **VІІ. а)** ; **б)** ; **в)** ; **г)** ; **д)** ; **е)** . **IX. а)** 1; **б)** 2; **в)** . **X. а)** ; **б)** ; **в)** ; **XІ. а)** ; **б)** ; **в)** . **XІІ. а)** 0, 1, ;  **б)** 0, , .

***Індивідуальні завдання***

І. Виконати дії:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1. | ; | 16. | ; |
| 2. | ; | 17. | ; |
| 3. | ; | 18. | ; |
| 4. | ; | 19. | ; |
| 5. | ; | 20. | ; |
| 6. | ; | 21. | ; |
| 7. | ; | 22. | ; |
| 8. | ; | 23. | ; |
| 9. | ; | 24. | ; |
| 10. | ; | 25. | ; |
| 11. | ; | 26. | ; |
| 12. | ; | 27. | ; |
| 13. | ; | 28. | ; |
| 14. | ; | 29. | ; |
| 15. | ; | 30. | . |

ІІ. Обчислити квадратний корінь із комплексного числа:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. |  | 11. |  | 21. |  |
| 2. |  | 12. |  | 22. |  |
| 3. |  | 13. |  | 23. |  |
| 4. |  | 14. |  | 24. |  |
| 5. |  | 15. |  | 25. |  |
| 6. |  | 16. |  | 26. |  |
| 7. |  | 17. |  | 27. |  |
| 8. |  | 18. |  | 28. |  |
| 9. |  | 19. |  | 29. |  |
| 10. |  | 20. |  | 30. |  |

ІІІ. Розв’язати рівняння:

1. . 2. .

3. . 4. .

5.. 6. .

7. . 8. .

9. . 10. .

11. . 12. .

13. . 14. .

15.  16. .

17. . 18. .

19. . 20. .

21. . 22. .

23. . 24. .

25. . 26. .

27. . 28. .

29. . 30. .

# Практичне заняття 8

# *Геометрична інтерпретація комплексного числа.*

***Основні теоретичні відомості***

([1],c. 205-231, [2], с. 110 – 129; [4], с. 32-35).

В основу геометричної інтерпретації поля комплексних чисел покладено можливість у прямокутній системі координат кожному комплексному числу  ставити у відповідність точку  площини . Між елементами множини комплексних чисел і точками декартової площини існує взаємно однозначна відповідність. Дійсні числа зображуються точками осі , суто уявні – точками осі . Тому  називають *дійсною*, а вісь  *уявною*. Числу  відповідає точка .

Отже, через  одночасно позначається і комплексне число, і точка, що зображає це комплексне число.

Площину, точки якої зображають комплексні числа, називають *комплексною площиною*.

Комплексне число  розглядається як вектор, початок якого знаходиться в точці , а кінець в точці . Довжину цього вектора, що дорівнює , називають *модулем*комплексного числа  і позначають  або , тобто . Очевидно, що .

Отже, *комплексною координатою вектора*  є комплексне число . Комплексне число  називають також *комплексною координатою точки* ****** (Рис. 1).

Оскільки при додаванні та відніманні векторів їх відповідні координати додаються та віднімаються, то те саме справджується і для комплексних координат. Нехай вектори  і  мають комплексні координати  і , а вектор  має комплексну координату . Тоді . Геометрично це означає, що вектор  - це діагональ паралелограма, що побудований на векторах  і  (Рис. 2). Звідси випливає, що .

Нехай - комплексна координата вектора . Тоді . Числа  і  є комплексними координатами точок  і , тому комплексна координата вектора дорівнює різниці між комплексними координатами його кінця та початку. (Рис. 3).

0

y

x

Рис. 2

A





B

C

1



y

x







B

A

Рис. 3

0

y

x

*a*

*b*

Рис. 1

z

*Зауваження:*

1. Відстань між точками  і  дорівнює .

2. Рівність  задає рівняння кола радіуса  з центром у точці .

3.  - рівняння прямої, перпендикулярної до відрізка, що сполучає точки ,  і проходить через його середину .

4. Подвійна нерівність  виконується для множини точок, які на комплексній площині зображуються кільцем, утвореним двома концентричними колами, причому точки меншого кола цій множині не належать. Центр концентричних кіл знаходиться у точці .

***Питання для самоперевірки***

1. Що є геометричним образом комплексного числа на площині?
2. У чому полягає ідея інтерпретації комплексного числа як радіус – вектора? Як при цьому інтерпретується додавання та віднімання чисел?
3. Поясніть, що таке аргумент комплексного числа та його головне значення.
4. Що можна сказати про модуль і аргумент комплексного числа, яке є додатним дійсним числом?
5. Три комплексні числа мають однакові аргументи. Як розмістяться відповідні точки в комплексній площині?
6. Як розмістяться в комплексній площині точки, що відповідають комплексним числам з однаковими модулями?
7. Як знайти відстань між точками  та ?
8. В якій точці знаходиться центр кола заданого рівністю?
9. Яке положення прямої в комплексній площині визначає рівність ?
10. Чому дорівнює радіус меншого кола множини точок, які в комплексній площині задовольняють нерівність ?

***Методичні вказівки до розв’язання задач***

**Приклад 1.** *Визначити, де розміщена множина точок комплексної площини, для яких виконується нерівність .*

*Розв’язання:* Рівність  є рівнянням прямої , що паралельна осі  і проходить через точку  (множина точок, які знаходяться на однаковій відстані від точок  та . Дану нерівність задовольняють точки, розміщені вище від прямої . Точки прямої не входять до цієї множини (мал. 4).

**Приклад 2.** *Яка множина точок на комплексній площині описується нерівностями: *

*Розв’язання:* Рівняння  є рівнянням бісектриси I і III координатних кутів, яка розбиває комплексну площину на дві півплощини. Нерівність визначає ту з них, яка містить точку  і не включає самої бісектриси, а нерівність  визначає півплощину 

Множину точок, що задовольняє обидві нерівності, заштриховано на Рис. 5, при цьому точки контуру фігури не належать цій множині.







1

2

3

4







0

0





Рис.4

Рис.5

**Приклад 3*.*** *Знайти геометричне місце точок комплексної площини, які задовольняють рівняння .*

*Розв’язання:* Число  геометрично означає відстань між точками  і . Аналогічно, число  означає відстань між точками  і . Отже, даному рівнянню задовольняють ті і тільки ті точки , сума відстаней яких від точок  і  дорівнює сталому числу 8. Множина таких точок утворює еліпс з фокусами в точках  і , більша вісь якого дорівнює 8.

**Приклад 4.** Знайти геометричне місце точок комплексної площини, якщо:

**а**) ; **б**) ; **в**) ); **г**) ;

**д**) ; **е**) ; **є**) .

*Розв’язання:* а) Оскільки , то шукана множина точок лежать на прямій , паралельній уявній осі ( Рис. 6)

0

1

-2





Рис. 7



0

3



Рис. 6

б) Оскільки , то шукана множина точок є частина площини, розташованої між прямими  та , паралель ними дійсній осі (точки самих прямих  та  не належать шуканій множині ) (Рис. 7)

****



0





Рис. 8

в) Шукана множина є внутрішня частина кута з вершиною в т. (0, 0) між променями, які утворюють з дійсною віссю  кути  та . (Рис. 8).

г) Оскільки модуль комплексного числа  дорівнює , то точки шуканої множини задовольняють нерівність , або . Отже, шукані точки розташовані в середині та на межі круга з центром в т. (0, 0) і радіусом рівним 2. (Рис. 9)

0





Рис. 9

д) Шукана множина точок обмежена кільцем із центром у точці  і радіусами відповідно 1 і 3. (Рис. 10).

(2, 0)

(0, -1)





Рис. 11

0

-2

1

0





Рис. 10

А

(3; 0)

(1; 0)

(0; 1)

Рис. 12

е) Шукана множина точок розташована на серединному перпендикулярі до відрізка з кінцями в точках  та  (Рис. 11).

є) Шуканою множиною є точка рівновіддалена від трьох точок ,  і  (Рис. 12).

**Приклад 5.** Дано , , . Знайти .

*y*

*x*

0

B

A

C





1

2

*Розв’язання:*

1 - ;

2 - .

Нехай числа  та  зображуються на малюнку векторами  та . Так як в паралелограмі сума квадратів діагоналей = сумі квадратів його сторін, маємо , тобто  .

**Приклад 6.** Знайти геометричне місце точок, що зображують комплексні числа, які задовольняють умові:

а) .

*Розв’язання:* Оскільки , а , то  або

0









Шукана множина точок лежить у верхній півплощині координатної площини . На малюнку зображена шукана множина точок.

б) .





*Розв’язання:* Всі точки, які лежать в середині кута з вершиною в точці (0; 0) і розхилом , а також точки, розташовані на промені .

в) .





(-1; 1)

0





*Розв’язання:* Шукана множина точок лежать в середині кута з вершиною в точці  і обмежена прямими  та, причому .

г) 





-2

2

-1



*Розв’язання:*









Шукана множина точок розташована нижче параболи . Точки параболи не належать шуканій множині.





0

1

2

д)

До шуканої множини належать точки, розташовані поза колом радіуса 2 з центром в точці (0; 0) і в середині кута з вершиною в точці (0; 0) і розхилом ; точки, розташовані на промені  при ; точки, розташовані на дузі кола , які лежать в середині даного кута.

є) 





-1



1

1

-1



*Розв’язання:*

,

,

,



Шукана множина точок розташована на параболі .

ж) 

*Розв’язання:*



1

1

-2

-1





0

Шукана множина точок розташована в середині кола радіуса 1 з центром в точці .





5

5

з) .

*Розв’язання:*



-2

-1

5

, отже .

Шукана множина точок лежить у середині кола радіуса 5 з центром в точці .

і) .

*Розв’язання:*





Переріз цих множин зображено на малюнку. Точки перерізу лежать поза колом радіуса  з центром в точці  та точки, які лежать у середині кола радіуса  з центром в точці .





1

1

**Приклад 7.** Знайти число з найменшим модулем серед комплексних чисел , яке задовольняє умову .

*Розв’язання:*

Оскільки ,

а , то

,

,

Геометричне місце точок, що задовольняє умові знаходиться на прямій . За означенням модуля комплексного числа . Отже, необхідно обчислити найменшу відстань від початку координати до прямої . Найменшою відстанню буде довжина перпендикуляра, опущеного з початку координат на пряму. На малюнку це буде відрізок . . Розглянемо прямокутний :   . Так як  прямокутний, то за властивістю  будемо мати .





0



В



С



Так як пряма  розташована у I, II, III, четвертях координатної площини, то  може набувати значення: . Тоді .

*Відповідь:* *.*

***Вправи для аудиторної і самостійної роботи***

**І.** Знайти геометричне місце точок комплексної площини, якщо:

1) ; 2) ; 3) ;

4) ; 5) ; 6) ;

7) ; 8); 9) ;

10) .

**ІІ.** Знайдіть усі комплексні числа, для яких виконуються рівності: а)  і  б)  і 

**IІІ.** В яких межах змінюється аргумент комплексних чисел, які задовольняють умові:

а) ? б) ? в) ? г) ?

**ІV.** Вектор  має комплексну координату . Знайти комплексну координату його кінця, якщо комплексна координата його початку .

**V.** Знайти середину відрізка, кінці якого розташовані в точках , .

**VІ.** Знайти третю вершину правильного трикутника, якщо дві інші вершини знаходяться в точках  та .

**VІІ.** Знайти число з найменшим модулем серед комплексних чисел , які задовольняють умови:

а) ; б) ;

в) ; г) .

**VІІІ.** Розв’язати рівняння:

а)  б)  в) 

***Відповіді***

**І. 1)** ; **2)** хорда кола з центром в точці  і радіусом 1,без її кінців; **3)** всі точки всередині круга з радіусом 10 та центром в точці , за виключенням точки ; **4)** коло з центром в початку координат і радіусом ; **5)** всі точки частини площини, що розміщенні правіше прямої , крім точки ; **6)** еліпс ; **7)** всі точки, що лежать під прямою ; **8)** внутрішня частина круга радіусом 1 та центром в точці ; **9)** всі точки прямої ; **10)** точки розміщені зовні кола радіуса 10 з центром в точці . **ІІ. а)** ; **б)** , . **IІІ. а)** ; **б)**; **в)** ;

**г)** . **ІV.** ; **V.** **;VІ.** .

**VІІ. а)** ; **б)** ; **в)**  або ; **г)** ; **VІІІ. а)** , **б)** ; **в)** .

***Індивідуальні завдання***

І. Знайти геометричне місце точок, що зображують комплексні числа:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. |  | 11. |  | 21. |  |
| 2. |  | 12 |  | 22. |  |
| 3. |  | 13. |  | 23. |  |
| 4. |  | 14. |  | 24. |  |
| 5. |  | 15. |  | 25. |  |
| 6. |  | 16. |  | 26. |  |
| 7. |  | 17. |  | 27. |  |
| 8. |  | 18. |  | 28. |  |
| 9. |  | 19. |  | 29. |  |
| 10. |  | 20. |  | 30. |  |

**ІІ**. Знайти геометричне місце точок, що зображують комплексні числа, які задовольняють умові.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. |  | 11. |  | 21. |  |
| 2. |  | 12. |  | 22. |  |
| 3. |  | 13. |  | 23. |  |
| 4. |  | 14. |  | 24. |  |
| 5. |  | 15. |  | 25. |  |
| 6. |  | 16. |  | 26. |  |
| 7. |  | 17. |  | 27. |  |
| 8. |  | 18. |  | 28. |  |
| 9. |  | 19. |  | 29. |  |
| 10. |  | 20. |  | 30. |  |

# Практичне заняття 9

# *Тригонометрична форма комплексного числа.*

# *Дії над комплексними числами в тригонометричній формі*

***Основні теоретичні відомості***

([1], с. 205 – 231, [2], с.110–129.)

Нехай числом  на комплексній площині задано вектор . Позначимо через  кут між додатною піввіссю  і вектором .

y

x

0



A

Кут  називають *аргументом*комплексного числа і позначають . На відміну від модуля аргумент комплексного числа визначається з точністю до сталого доданка виду  , . Серед нескінченної множини значень  є одне значення, що належить півінтервалу . Його називають *головним значенням*і позначають .

Отже, .

Кут   називають ще *головним аргументом****.*** Величину цього кута можна знайти з систем:

, або 

Оскільки  де , то будь-яке комплексне число  можна виразити через його модуль і аргумент . Це і є тригонометрична форма комплексного числа.

Якщо , то

.

Якщо , то

.

Тому .

Дану рівність називають *формулою Муавра* ***–*** на ім’я англійського математика Муавра де Абрахама (1667-1754).

,

.

***Питання для самоперевірки***

**1**. Запишіть і сформулюйте правила, за якими виконуються дії над комплексними числами записаними в тригонометричній формі.

**2**. Чому дорівнює модуль і аргумент комплексного нуля?

**3**. Чи може бути модулем комплексного числа одночасно числа  та ?

**4**. Чи може бути аргументом комплексного числа одночасно кути  та ?

**5**. Як зміниться аргумент і модуль комплексного числа в результаті ділення цього числа на: а) ; б) ?

***Методичні вказівки до розв’язання задач***

**Приклад** **1**. *Записати в тригонометричній формі числа*:

а) ; б) ; в) ; г) .

*Розв’язання:* а) Маємо  . Оскільки  і , то . Отже,  і .

б) 

. . . Отже,  і .

Цю задачу можна було розв’язати іншим способом, а саме: позначимо .

Тоді   

  і . . .





.



.

в) ,

.

.

г) .

, якщо  і , якщо .

**Приклад** **2**. *Визначити тригонометричну форму комплексного числа:*

а) ; б) ;

в) .

*Розв’язання:* а) 

.

Отже, .

б) .  

.

Отже, .

в) 



.

**Приклад 3.** *Знайти найбільше і найменше значення , якщо *.

*Розв’язання:* .

Якщо  при , то  приймає найбільше значення, а саме, .

Якщо  при , то  приймає найменше значення, а саме, .

**Приклад 4**.*Виконати вказані дії:*

а) ;

б);

в) ;

г) .

*Розв’язання:* а) За формулою добутку комплексних чисел в тригонометричній формі маємо: 

.

б) 

.

в) За формулою частки двох комплексних чисел в тригонометричній формі маємо: 

г) 

.

**Приклад 5**. *Користуючись формулою Муавра, обчислити*:

а);

б) ;

в) .

*Розв’язання:* а) За формулою Муавра маємо: 

 б) Введемо позначення: . Тоді . За формулою Муавра обчислимо окремо ,  і .



 













Отже, 



в) . Введемо позначення: 

. . Виразимо , , ,  в тригонометричній формі.  (за умовою б)),

.

Отже,











.

**Приклад 6**. *Дано *. *Знайти* 

*Розв’язання:* Нехай комплексні числа  і  зображуються на Рис. 1 векторами  і . Тоді сума  і різниця  зображатимуться векторами  і . Умова  означає, що довжини діагоналей, утвореного паралелограма  рівні, тобто, що - прямокутник.

**y**

**x**

0

B

A

C





1

2







Рис. 2

.

Рис. 1

1 - ;

2 - .

Отже, найменша абсолютна величина кута між векторами  та , які відповідають числам  та , рівна , тобто  може набувати значень або , або .





Рис. 3

Перебираючи різні можливості відносно розташування точок  і , бачимо, що умова задачі допускає обидва варіанти:  та **.**

**Приклад 7**. Виразити  і  через  і .

*Розв’язання:* Розглянемо комплексне число  і обчислимо  за формулами Муавра і бінома Ньютона. Дістанемо:

 (за формулою Муавра),

 ( за формулою бінома Ньютона).

Комплексні числа рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їх дійсні частини та коефіцієнти при , тому маємо:

, .

*Зауваження****.*** Так же можна виразити через  і  функції  та  для .

**Приклад 8**.Обчислити суму: .

*Розв’язання:* Для визначення шуканої суми знайдемо спочатку суму , де .

Позначимо вираз  через  і маючи на увазі, що , дістанемо: . За формулою суми геометричної прогресії маємо:













.

Порівнюючи одержаний вираз з рівним йому виразом , обчислюємо 



**Приклад 9**. *Виразити через многочлени першого степеня від тригонометричних функцій кутів, кратних , функції: а) ; б) .*

*Розв’язання:* а) Нехай . Тоді

.

Піднесемо до відповідного степеня кожну з цих рівностей:





Використаємо те, що  , дістанемо:



Аналогічно, 



***Вправи для аудиторної і самостійної роботи***

**І.** Записати комплексні числа в тригонометричній формі:

а) ; б) ; в) ; г) ;

д) ; е) ; є) ; ж) .

**ІІ.** Обчислити модуль і аргумент комплексного числа , якщо:

а) ; б) ; в) ;

г) ; д) ;

е) .

ІІІ. Піднести до степеня комплексні числа:

а) ; б) ; в) ;

г) ; д) ;

е) ; є) ;

ж) ; з) , де .

IV.Серед комплексних чисел, які задовольняють умові:

а) , знайти число, додатний аргумент якого найменший;

б) , знайти число, що має найменше значення головного аргументу;

в) , знайти число з найбільшим модулем.

**V.** a) За яких умов модуль суми двох комплексних чисел дорівнює різниці модулів доданків;

б) За яких умов модуль суми двох комплексних чисел дорівнює сумі модулів доданків.

**VІ.** Знайти модуль і всі аргументи уявного числа , якщо , де  - дійсне число відмінне від нуля.

VІІ. Виразити через  і  такі функції:

а) ; б) ; в) ; г) .

VІІІ. Знайти суму:

а) ; б) .

***Відповіді:* І. а)** ; **б)** ; **в)** ;**г)**;**д)** 

**е)** ; **є)** ,якщо, , якщо ; **ж)** ; **ІІ. а)** 125**,** , ; **б)** 0,25, , ; **в)** ,,  ; **г)** 0, не визначений; **д)** 64, ; **е)** , . **ІІІ. а)** ; **б)** ; **в)** ;

**г)** ; **д)**; **е)** -1; **є)** -64; **ж)** ;

**з)** ; **ІV.** а) ;**б)** ; **в)** . **V.** якщо різниця аргументів цих чисел дорівнює: **а)** , де ; **б)** , де ; **VІ.** 1, , ;

**VІІ. а)** ;

**б)**;

**в)** ;

**г)** . **VІІІ. а)** , , , **б)** ,, .

***Індивідуальні завдання***

Виконати дії в тригонометричній формі:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | 16. |  |  |
|  |  |  | 17. |  |  |
|  |  |  | 18. |  |  |
|  |  |  | 19. |  |  |
|  |  |  | 20. |  |  |
|  |  |  | 21. |  |  |
|  |  |  | 22. |  |  |
|  |  |  | 23. |  |  |
|  |  |  | 24. |  |  |
|  |  |  | 25. |  |  |
|  |  |  | 26. |  |  |
|  |  |  | 27. |  |  |
|  |  |  | 28. |  |  |
|  |  |  | 29. |  |  |
|  |  |  | 30. |  |  |

# Практичне заняття 10

# *Добування кореня го степеня з комплексного числа*

***Основні теоретичні відомості***

([1], с. 205 – 231, [2], с.110–129.)

Нехай , .

Припустимо, що  існує і дорівнює . Тоді

.

Але за формулою Муавра

.

Отже,

.

Відомо, що два комплексних числа рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їх модулі, а аргументи або рівні, або відрізняються доданком, кратним . Тому з останньої рівності випливає, що



де  будь-яке ціле число.

Звідси



де  - арифметичне значення кореня го степеня з додатного числа , бо модуль  є число додатне.

Навпаки, при будь-якому цілому числі  й степінь числа



очевидно, дорівнює числу .

Отже, 



де - довільне ціле число.

Покажемо, що різних значень кореня є лише . Справді, надаючи  значення  дістанемо  різних значень кореня, бо при   і  очевидно,   де  – ціле число.

Якщо візьмемо , де  будь-яке ціле число, відмінне від  то ,де і ** – деякі цілі числа, причому  Тоді



тобто значення аргументу при відрізняється від значення аргументу при  доданком, кратним . Отже, при  ми дістанемо те саме значення кореня, що й при .

**Теорема**.*Операція добування кореня в полі комплексних чисел завжди здійсненна: які б не були натуральне число  і комплексне число , корінь го степеня з числа  існує; якщо , то , якщо , то  має  значень, що визначаються формулою:*



**.

***Питання для самоперевірки***

1. В чому полягає операція добування кореня -го з комплексного числа? Скільки існує коренів -го степеня з комплексного числа?

2. Який геометричний зміст мають значення , якщо .

3. Які умови рівності комплексних чисел, заданих в тригонометричній формі?

***Методичні вказівки до розв’язання задач***

**Приклад 1.** Обчислитивсі значення  і знайти їх геометричне зображення.





1

1









*Розв’язання:* Корінь -го степеня з комплексного числа, записаного в тригонометричній формі, обчислюється за формулою:

 Представимо число  в тригонометричній формі: .

.

Надамо параметру  значень 0, 1, 2, 3 і дістанемо 4 значення :



Зображення коренів в комплексній площині подано на рисунку.

**Приклад 2**.*Обчислити* .

*Розв’язання:* Представимо числа  та  в тригонометричній формі:

.

Тоді,











Надамо параметру  значень 0, 1, 2, 3, 4, 5 і обчислимо 6 шуканих коренів:



**Приклад 3**.*Розв’язати рівняння*  *на множині комплексних чисел.*

*Розв’язання:* Запишемо рівняння у вигляді . Число  представимо в тригонометричній формі: .

За формулою кореня коренів -го степеня з комплексного числа, обчислимо: 



Надамо параметру  значень 0, 1, 2, 3, 4 і обчислимо:





2

-2

2











720

360

Рис. 2



Знайденим кореням рівняння відповідають вершини правильного п’ятикутника, вписаного в коло радіуса  з центром в початку координат.

**Приклад 4**.*Скориставшись коренями 3-го степеня із 1, обчислити* .

*Розв’язання:* Відомо, що всі значення кореня -го степеня з комплексного числа  можна дістати, помноживши одне з цих значень на кожний з коренів -го степеня з 1. Одне із значення  дорівнює , так як .

Знайдемо всі значення :



Помноживши  на значення кубічних коренів з 1, дістанемо всі значення :



**Приклад 5**.*Знайти первісні корені* *го степеня з* .

*Розв’язання:* Серед чисел 1,2,3,4,5,6,7 взаємно простими з 8 будуть числа 1,3,5,7. Отже, первісними коренями будуть:



**Приклад 6**.*Побудувати в комплексній площині два різних числа  і , де  і зобразити ці числа: а) ; б) .*

*Розв’язання:* а) Так як , а , то точки, які відповідають числам  і  розташовані на колі радіуса  з центром в точці .

1





0







Аналогічно, точки  знаходяться на колі радіуса  з центром в точці . Тоді точки  відповідатимуть вектори , а точкам  відповідатимуть вектори . Отже, точки, які відповідатимуть різниці комплексних чисел, будуть розташовані на векторах , розташованих в крузі радіуса  центром в точці .

б) Розглянемо , .

За означенням спряженого числа . Тоді , а .

Отже, точки чисел  розташовані на колі, радіуса 8, центр його знаходиться в точці .

**Приклад 7**.*Побудувати в комплексній площині число , де , і знайти геометричне місце точок, які відповідають числам:*

а) ; б) .





1

1

-1

-1

*Розв’язання:* а) Точки, які відповідають числу , де **, розташовані на колі радіуса , центр кола в точці . Позначимо  і знайдемо тригонометричну форму .

Якщо розглянути число , де  в тригонометричній формі, то  де . Тоді

.

Точки  розташовані також на колі  із центром , тільки аргументи точок  будуть збільшені на .

5

-5





б) , ,

, ,



 .

Точки, які відповідають числам  розташовані на колі , з центром в точці . Шукані точки, які відповідають  розташовані на колі  з центром в точці .

***Вправи для аудиторної і самостійної роботи***

**I.** Обчислити значення коренів:

а) ; б) ; в) ; г);

д);е) ; є) ; ж) .

**II.** Розв’язати рівняння:

а) ; б) ; в) ; г) ; д) ;

е) ; є) ; ж) ; з) .

**III.** Знайти суму всіх коренів: а) 6-го; б) 15-го; в) -го степеня з одиниці.

**IV.** Знайти всі первісні корені -го степеня з одиниці:

а) ; б) ; в) .

**V.** Знайти суму всіх первісних коренів -го степеня з одиниці:

а) ; б) .

**VІ.** Знайти всі значення , якщо:

а)  і  є одним із значень ;

б)  і  є одним із значень .

**VІІ.** Довести, якщо  і  взаємно прості, то всі корені степеня  із одиниці одержуються множенням коренів го степеня із одиниці на корені го степеня із одиниці.

**VІІІ.** Довести, якщо добуток первісного кореня го степеня із одиниці на первісний корінь го степеня із одиниці є первісним коренем го степеня із одиниці, то  і  взаємно прості.

**ІХ**. Подати в алгебраїчній формі числа , такі, що

а) ; б) ; в) ; г) .

***Відповіді***

**І. а)** , де  і ;

**б)** , де  і ;

**в)** , де 1,2,3,4,5;

**г)** , де 1,2,3,4,5,6,7 і ; **д)** , де ;

**е)** , де ;

**є)** , де ; **ж)** , де . **ІІ. а)** , ; **б)** **,** ;

**в) ,** ; **г)** , ; **д)** -1, , , , , де ; **е)** 1, , , , , , де ; **є)** , де  і ; **ж)** , де  і ; **з)** , де ,  і . ІІІ. у всіх випадках сума дорівнює нулю; **IV. а)** , , ; **б)** , , , ; **в)** , , , , , , **; V.** у всіх випадках сума дорівнює 1; **VІ. а)** , ; ; ; **б)** , , , , , , де . **VІІ.** Вказівка.Показати, якщо **-** всі корені -го степеня із одиниці, - всі корені -го степеня із одиниці, то  всі різні і є коренями -го степеня із одиниці; **VІІІ.** Вказівка**.**  Довести, якщо - первісний корінь -го степеня із одиниці, - первісний корінь -го степеня із одиниці, то  тоді і тільки тоді, коли  ділиться на  і ділиться на , отже, ділиться на . **ІХ. а)** ;**б)** ;

**в)** ;

**г)**.

***Індивідуальні завдання***

Виконати дії в тригонометричній формі:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  | 16. |  |  |
|  |  |  | 17. |  |  |
|  |  |  | 18. |  |  |
|  |  |  | 19. |  |  |
|  |  |  | 20. |  |  |
|  |  |  | 21. |  |  |
|  |  |  | 22. |  |  |
|  |  |  | 23. |  |  |
|  |  |  | 24. |  |  |
|  |  |  | 25. |  |  |
|  |  |  | 26. |  |  |
|  |  |  | 27. |  |  |
|  |  |  | 28. |  |  |
|  |  |  | 29. |  |  |
|  |  |  | 30. |  |  |

# Література

1. *Основна:*
2. Завало С.Т. Алгебра і теорія чисел/ С.Т. Завало, В.М. Костарчук, Б.І. Хацет. – К.:«Вища школа», 1974. – 464 с.
3. Курош А.Г. Курс высшей алгебры/ А.Г. Курош. – М.: «Наука», 1971. –432 с.
4. Шевцов А.Г. Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты: Учеб. пособие / А.Г. Шевцов. – М.: Финансы и статистика, 2003.– 576 с.
5. Фадеев Д.К. Сборник задач по высшей алгебре/ Д.К. Фадеев, И.С. Соминский – М.: «Наука», 1972.–304 с.
6. Завало С.Т. Алгебра і теорія чисел: Практикум/ С.Т. Завало, С.С. Левіщенко, В.В. Пилаєв, І.О. Рокицький – К.: Вища школа. Головне вид-во, 1983. – ч.I. – 232 с.

*II. Додаткова.*

1. Барковський В. В. Вища математика для економістів/ В.В. Барковський, Н. В. Барковська. – К.: ЦУЛ, 2010. – 448с.
2. Вавилов В. В. Задачи по математике. Алгебра. Справочное пособие./ В. В. Вавилов, И.И. Мельников, С. Н. Олехник, П.И. Пасиченко. – М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 432 с.
3. Валєєв К.Г. Вища математика: Навч. посібник./ К.Г. Валєєв, І.А. Джалладова. – К.:КНЕУ, 2001. – ч.І. – 546с.
4. Гетманцев В.Д. Лінійна алгебра і лінійне програмування: Навч. посібник/ В.Д. Гетманцев – К.: Либідь, 2001.–256с.
5. Глухов М.М. Задачник-практикум по курсу высшей алгебры./ М.М. Глухов, А.С. Солодовников. – М.: Просвещение, 1965. – 206 с.
6. Гусак А.А. Справочник по высшей математике./ А.А.Гусак. - Мн.: ТетраСистемс, 2001.–640с.
7. Кремер Н.М. Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов./ Н.М. Кремер. - М.: ЮНИТИ, 2002.– 471с.
8. Кушнір. І. Комплексні числа: Теорія і практика./І. Кушнір.–К.:Факт, 2002. –168с.
9. Мишина А.П. Высшая алгебра (линейная алгебра, многочлены, общая алгебра)./ А.П. Мишина, И.В. Проскуряков. – М.: Физматгиз, 1962.–300с.
10. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре./ И.В. Проскуряков. – М.: БИНОМ, 2005.–383с.
11. Овчинников П.П. Вища математика: Підручник./ П.П. Овчинников та ін. – К.: Техніка, 2003.– ч.1.–600с.
12. Солодовников А.С. Математика в экономике: Учебник в 2-х частях./ А.С. Солодовников, В.А.Бабайцев, А.В. Браилов. – М.: Финансы и статистика, 2000.– ч. 1.–224с.